

TERQUEM

Problème sur les probabilités

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 218-221

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__218_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME SUR LES PROBABILITÉS (*).

L'urne A renferme n boules blanches ; l'urne B, n boules noires ; à chaque seconde il passe une boule de A en B et une autre de B en A. On demande le nombre probable de boules blanches qui se trouveront en A au bout de t secondes.

Solution. Supposons qu'au bout de $t-1$ seconde, il y ait :

Dans A... p , noires, et $n-p$. blanches ;

Dans B... $n-p$. noires, et p . blanches.

(*) Ce problème, généralisé pour un nombre quelconque d'urnes, a été proposé et résolu par Bernoulli (Daniel). *N. mém. de Petersbourg*, t. XIV. 1769, p. 2.

Il y a quatre cas possibles :

1° Une noire va de A en B et une noire de B en A ; l'état de A et de B ne sera pas changé ; la probabilité, pour qu'un tel échange ait lieu, est représentée par $\frac{p}{n} \times \frac{n-p}{n}$; et comme il y a $n-p$ boules blanches, la valeur totale de la blancheur sera représentée par $\frac{p(n-p)^2}{n^2}$

2° Une boule noire va de A en B et une blanche de B en A ; la probabilité d'un tel échange est représentée par $\frac{p}{n} \cdot \frac{p}{n}$; et le nombre de boules blanches devient $n-p+1$; ainsi la valeur actuelle de la blancheur est $\frac{p^2(n-p+1)}{n^2}$

3° Une boule blanche va de A en B et une noire de B en A ; la probabilité est $\frac{n-p}{n} \times \frac{n-p}{n}$; le nombre de boules blanches est alors $n-p-1$; donc la valeur probable est $\frac{(n-p)^2(n-p-1)}{n^2}$

4° Une boule blanche va de A en B et une blanche de B en A ; la probabilité est $\frac{p}{n} \times \frac{n-p}{n}$; le nombre de boules blanches reste $n-p$, ainsi la valeur est $\frac{(n-p)^2 p}{n^2}$.

La somme de ces quatre valeurs est égale à

$$(n-p) \frac{(n-2)}{n} + 1.$$

Or, en commençant on a $p=0$;

donc au bout de la 1^{re} seconde, la valeur certaine est :

$$n-1$$

2^e seconde, la valeur probable $\frac{(n-1)(n-2)}{n} + 1$

3^e seconde. $\frac{(n-1)(n-2)^2}{n^2} + \frac{n-2}{n} + 1 ;$

Au bout de la $t^{\text{ème}}$ seconde :

$$\frac{(n-1)(n-2)^{t-1}}{n^{t-1}} + \left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-2} + \left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-3} + \dots + \frac{n-2}{n} + 1 = s.$$

Faisant $\frac{n-2}{n} = 1 - r$; on aura : $s = \frac{(1-r)^t + 1}{r}.$

Coroll. 1. Si $t = \infty$; $s = \frac{1}{r} = \frac{n}{2}$; ainsi, au bout d'un temps infini, on peut parier un contre un, qu'il ne reste dans l'urne A que la moitié des boules blanches ; résultat qu'on peut trouver à priori.

Coroll. 2. Si r est une quantité très-petite, mais tr un produit appréciable, on a sensiblement :

$$(1-r)^t = 1 - tr + \frac{t^2 r^2}{1 \cdot 2} - \frac{t^3 r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots = e^{-tr}; e \text{ étant la base du système népérien ; donc, lorsque } n \text{ est très-considérable, on a : } s = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{1}{e^{tr}}\right) = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{1}{e^{\frac{2t}{n}}}\right) (1).$$

Coroll. 3. Si deux vases A et B d'égale capacité sont remplis chacun d'un liquide différent, et s'ils communiquent par des canaux de manière qu'il s'écoule uniformément la même quantité de liquide de A en B et de B en A ; la formule (1) fait connaître à chaque instant l'état du mélange ; n représente le volume ; et connaissant l'état du mélange au bout d'un temps t' , on le connaîtra pour un temps quelconque t .

5° Autrement ; A, a pour acquérir une boule blanche, une probabilité représentée par $\frac{p}{n}$; et pour perdre une boule blanche une probabilité $\frac{n-p}{n}$, de sorte que l'état probable de A au bout de t secondes sera :

$$n-p + \frac{p}{n} - \frac{(n-p)}{n} = (n-p) \frac{(n-2)}{n} + 1.$$

6° Soient maintenant trois urnes A, B, C; la première contient n boules blanches, la seconde n boules noires, et la troisième n boules rouges; à chaque seconde il passe une boule de la première dans la seconde, de la seconde dans la troisième, et de la troisième dans la première; quel est le nombre probable des boules blanches dans l'urne A au bout de t secondes? soit au bout de $t-1$ secondes le nombre de boules blanches, p dans A; p' dans B; et p'' dans C; on aura :

$$p + p' + p'' = n.$$

Ainsi A a une chance $\frac{p''}{n}$ de gagner une boule blanche, et une chance $\frac{p'}{n}$ de perdre. Donc, au bout de t secondes, l'état blanc probable de A est : $p + \frac{p''}{n} - \frac{p'}{n} = \frac{p(n-1) + p''}{n}$; celui de B : $\frac{(n-1)p' + p}{n}$; celui de C : $\frac{(n-1)p'' + p'}{n}$.

Tm.