

MIDY

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 214-218

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__214_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN.

(Voir t. III, p. 603.)

PAR M. MIDY,

ancien professeur dans les Collèges royaux.

On demande quelle est la courbe dont l'équation polaire est

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \omega}. \quad (1)$$

La valeur de ρ restant la même quand on y change le signe de $\cos \omega$, il s'ensuit que la courbe cherchée, déjà symétrique par rapport à l'axe polaire XOX' , l'est encore par rapport à la perpendiculaire YOY' , menée au pôle sur cet axe. De 0° , ou bien de 180° à 90° , le cosinus décroît en valeur absolue depuis 1 jusqu'à 0. Donc, entre ces limites, la valeur de ρ toujours positive, ira en croissant depuis 1 jusqu'à l'infini. La courbe est donc composée, comme l'indique la figure 27, de deux branches séparées et infinies UAV , $U'A'V'$, limitées en A et A' au cercle décrit du rayon $OA = 1$.

Sa construction est facile. En effet, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\rho = \frac{1}{\cos \omega} \cdot \frac{1}{\cos \omega}$$

et comme la perpendiculaire en A sur OX aurait pour équation

$$\rho = \frac{1}{\cos \omega},$$

il s'ensuit que si, pour un rayon vecteur quelconque OIN , on rabat du centre O le point N en N' et qu'on élève

en celui-ci une perpendiculaire sur l'axe, sa rencontre avec OR déterminera le point correspondant M de la courbe. D'ailleurs, à cause de l'égalité des triangles OIN', OAN, IN' est perpendiculaire sur OI. D'où il suit que le point M est encore à l'intersection du rayon vecteur OI prolongé et de la perpendiculaire élevée sur l'axe polaire au point où cet axe lui-même est coupé par la perpendiculaire menée à l'extrémité du rayon mobile. Ce qui donne un second moyen de construire la courbe considérée.

De l'équation (1) on déduit celle-ci :

$$\rho^4 \cos^4 \omega = \rho^2 \sin^2 \omega + \rho^2 \cos^2 \omega ;$$

d'où, passant aux coordonnées rectangulaires,

$$x^4 = x^2 + y^2 ; \quad (2)$$

par suite

$$x^2 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

Cette dernière équation equivaut à la proportion suivante

$$1 : x :: x : \sqrt{x^2 + y^2},$$

ou

$$OI : ON' :: ON' : OM$$

Réciproquement, celle-ci, qui est l'expression géométrique la plus simple du second mode de génération indiqué, conduirait immédiatement aux équations (2) et (1), si ces équations n'étaient point connues.

Proposons-nous maintenant de mener la tangente en un point quelconque de la courbe.

Nous aurons les équations :

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \omega} \text{ et } \rho + k = \frac{1}{\cos^2 (\omega + h)},$$

d'où

$$k = \frac{\cos^2 \omega - \cos^2 (\omega + h)}{\cos^2 \omega \cdot \cos^2 (\omega + h)},$$

expression qu'on peut changer en celle-ci :

$$k = \frac{h \cos \left(\omega + \frac{h}{2} \right) \sin \left(\omega + \frac{h}{2} \right) \cos \frac{h}{2} \sin \frac{h}{2}}{\cos^2 \omega \cdot \cos^2 (\omega + h)} ;$$

par suite

$$\lim^* \frac{h}{k} = \frac{\cos^3 \omega}{2 \sin \omega}.$$

Donc $\text{tang} = \frac{1}{2} \cot \omega$ et $st = \frac{1}{\sin \omega}.$

Discutons ces valeurs. Quand ω est égal à 0° , ou à 180° , tg . et st deviennent infinies. D'où il suit que les perpendiculaires en H et H' sur l'axe sont tangentes à la courbe. A mesure que ω augmente à partir de 0° , $\cot \omega$ et par suite tg ., ou, ce qui revient au même, l'angle OMT diminue. Pour $\omega = 90^\circ$, cet angle est nul.

D'ailleurs dans cette hypothèse O est infini : st l'est aussi ; donc pour ce point et pour le point correspondant sur la branche opposée, les tangentes, devenues des asymptotes de la courbe, sont parallèles à YOY, mais situées à une distance infinie de cette droite, en d'autres termes ces asymptotes n'existent plus (*fig.* 28). Voyons comment pour un point donné M de la courbe, on déterminera la position correspondante de la tangente au moyen de la valeur de st . Faites l'arc IG = IA et menez le diamètre GG' prolongé jusqu'à la rencontre en S de la tangente au cercle en B'. Rabattez S en T sur la perpendiculaire en O au rayon vecteur OIM et la droite TMT' sera la tangente demandée.

Si nous suivons le point de contact M et la position de la tangente depuis le sommet H de la courbe jusqu'à l'infini, nous reconnaitrons que la courbe, de convexe qu'elle était d'abord par rapport à YOY', lui devient nécessairement concave puisque les asymptotes sont parallèles à cette droite.

Il y a donc nécessairement sur chacune des deux bran-

ces deux points d'inflexion dont nous allons déterminer la position.

Soit menée par O une parallèle LL' à une tangente quelconque TMT'. Appelons θ l'angle LOB formé par cette droite et le diamètre BB'. Cet angle, nul d'abord quand le point de contact est en A, croît jusqu'à ce que le point M parvienne au point d'inflexion et décroît ensuite à partir de ce terme pour redevenir nul quand le point de contact passe à l'infini.

On voit par là qu'en déterminant la valeur maximum de cet angle θ , on aura la position correspondante du point d'inflexion cherché.

Or, à cause de la relation $tg \omega = \frac{1}{2} \cot \omega$ et de l'égalité des angles LOM, OMT, l'on a :

$$\frac{1}{2} \cot \omega = \tan (90^\circ - (\omega + \theta)),$$

d'où

$$2 \tan \omega = \frac{\tan \omega + \tan \theta}{1 - \tan \omega \tan \theta},$$

par suite

$$\tan \theta = \frac{\tan \omega}{1 + 2 \tan^2 \omega}.$$

Pour abréger, changeons cette expression en celle-ci :

$$u = \frac{z}{1 + 2z^2}.$$

Résolue par rapport à z , cette équation donne :

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 - 8u}}{4u}.$$

On en tire $u = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ pour la valeur maximum de u , et $z = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ pour la valeur correspondante de z .

Pour construire ces résultats, formons (*fig. 27*) le carré DE D'E' et menons ses diagonales. Rabattons du centre A', K en G et *g* et les lignes indéfinies GOM, *gOm* seront les directions des rayons vecteurs correspondant aux points d'inflexion cherchés. Faisons $B'H = B'H' = \frac{1}{2} B'K$. Les parallèles aux droites OH, OH' menées par les points M et *m*, M' et *m'* de la courbe, seront les tangentes correspondantes aux quatre points que l'on vient de nommer.

Nota. Cette question a déjà été traitée par les coordonnées rectangulaires, t. II p. 232. Descartes a imaginé un instrument formé de deux règles à l'aide duquel il construit d'un mouvement continu et simultanément les courbes données par les équations polaires

$$\rho = \frac{1}{\cos^2 \omega}, \rho = \frac{1}{\cos^4 \omega}, \rho = \frac{1}{\cos^6 \omega} \text{ etc.}$$

(Œuvres, t. V, p. 336, édition Cousin.)