

TERQUEM

Note sur les équations dont les racines forment une progression géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 210-213

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__210_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

*sur les équations dont les racines forment une progression
géométrique.*

1. Soit :

$$\begin{aligned} P &= (x-a) (x-ar) (x-ar^2) \dots (x-ar^{m-1}) = \\ &= x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_m ; \end{aligned}$$

posons $x = ry$, il vient :

$$\begin{aligned} P &= r^{m-1} (ry-a) (y-ar) (y-ar^2) \dots (y-ar^{m-2}) = \\ &= r^m y^m + A_1 r^{m-1} y^{m-1} + A_2 r^{m-2} y^{m-2} + \dots + A_m \\ &= \frac{r^{m-1}(ry-a)}{y-ar^{m-1}} (y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \dots + A_m) ; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (y-ar^{m-1}) (r^m y^m + A_1 r^{m-1} y^{m-1} + A_2 r^{m-2} y^{m-2} + \dots + A_m) = \\ = r^{m-1} (ry-a) (y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \dots + A_m) ; \end{aligned}$$

comparant les coefficients des termes semblables, on a :

$$\begin{aligned} A_1(1-r) &= a(r^m-1) \\ A_2(1-r^2) &= A_1 ar(r^{m-1}-1) \\ A_3(1-r^3) &= A_2 ar^2(r^{m-2}-1) \\ &\vdots \\ A_p(1-r^p) &= A_{p-1} ar^{p-1}(r^{m-p+1}-1); \end{aligned}$$

multipliant toutes ces équations, il vient :

$$(-1)^p A_p = a^p \cdot r^{\frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}} \frac{(r^{m-p+1}-1)(r^{m-p+2}-1)(r^{m-p+3}-1) \dots (r^m-1)}{r-1 \cdot r^2-1 \cdot r^3-1 \dots r^p-1}$$

p comprend toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à m inclusive-ment.

Corollaire I. Connaissant deux termes de l'équation, toutes les racines sont déterminées; puisqu'on a alors deux équations entre les inconnues a et r ; ce qui est aussi évident à priori.

Corollaire II. Lorsque $r=1$, on a $\frac{r^k-1}{r^s-1} = \frac{k}{s}$; et, dans la même hypothèse,

$$(-1)^p A_p = a^p \cdot \frac{m-p+1}{1} \cdot \frac{m-p+2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{m}{p};$$

mais alors $P = (x-a)^m$; on a ainsi une nouvelle démonstration du binôme.

Corollaire III. A_p est essentiellement une fonction entière de r , on a donc ce théorème :

Le produit $(r^k-1)(r^{k+1}-1)(r^{k+2}-1) \dots r^{k+p-1}$, est toujours divisible par

$$(r-1)(r^2-1)(r^3-1) \dots (r^p-1); k > p;$$

k et p entiers positifs. Ce théorème peut se démontrer directement, en effet, comparant les deux suites des exposants

$$k, k+1, \dots, k+p-1 \quad \text{et} \quad 1, 2, 3 \dots p;$$

l'expression $\frac{k(k+1) \dots (k+p-1)}{1 \cdot 2 \dots p}$ est un nombre entier.

Corollaire IV. Si $r = -1$; il faut distinguer deux cas :
1° m a une valeur paire, on a toujours :

$$\frac{r^k - 1}{r^s - 1} = \frac{k}{s} \text{ pour } r = -1,$$

si k et s sont des nombres pairs ; et si k et s sont impairs, on a
 $\frac{r^k - 1}{r^s - 1} = 1$; si k est pair et s impair, cette expression devient

nulle, toujours dans la supposition de $r = -1$.

Si donc p est pair, on a :

$$A_p = (-1)^{\frac{p}{2}} \cdot a^p \cdot \frac{m-p+2}{2} \cdot \frac{m-p+4 \dots m}{4 \dots p}.$$

Si p est impair, $A_p = 0$.

2° m a une valeur impaire ; si p est pair, alors on a :

$$A_{(p)} = (-1)^{\frac{p}{2}} \frac{m-p+1}{2} \cdot \frac{m-p+3 \dots m-1}{4 \dots p}.$$

Si p est impair, il vient :

$$A_p = (-1)^{\frac{3p-1}{2}} a^p \cdot \frac{m-p+2}{2} \cdot \frac{m-p+4 \dots m-1}{4 \dots p-1}.$$

Corollaire V. A_p ne peut être nul à moins que r ne soit une racine de l'unité ; soit α une racine de l'équation

$$x^t - 1 = 0,$$

et non d'un degré moindre. On a :

$$\frac{\alpha^{kt} - 1}{\alpha^{k't} - 1} = \frac{k}{k'},$$

et $\frac{\alpha^{kt+s} - 1}{\alpha^{k't+s} - 1} = 1$; soit donc $m = kt + s$; $p = k't + s'$; si k' est nul, alors A_p peut devenir nul.

Soit dans le numérateur, nt le premier exposant de r , qui est un multiple de t , alors on aura

$$(-1)^p A_p = a^p \cdot \alpha^{\frac{p \cdot p-1}{2}} \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \dots \frac{n+k-1}{k}; \text{ car } \frac{\alpha^{nt} - 1}{\alpha^t - 1} = \frac{n}{1},$$

et ainsi des autres.

Corollaire VI. Si dans le corollaire précédent on a $t = m$, alors toutes les valeurs de A_p sont nulles, excepté lorsque p

devient m ; alors $(-1)^m A_p = a^m \cdot \alpha^{\frac{m-1}{2}}$, et

$$\alpha^{\frac{m-1}{2}} = \sqrt{\alpha^{m-1}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \alpha^{-\frac{1}{2}}.$$

Corollaire VII. Si r est moindre que l'unité et $m = \infty$, alors

$$(-1)^p A_p = a^p \cdot r^{\frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}} \frac{1}{1-r} \cdot \frac{1}{1-r^2} \cdot \frac{1}{1-r^3} \dots \frac{1}{1-r^p};$$

car $r^{m-k} = 0$, k étant un nombre déterminé.

Corollaire VIII. Si a est négatif, r restant positif, il suffit de supprimer le facteur (-1) dans le premier membre de l'équation (1).

Corollaire IX. La même équation (1) sert à résoudre cette question : Connaissant les m termes consécutifs d'une progression géométrique, trouver la somme d'une fonction symétrique quelconque de ces termes, car l'équation (1) permet de calculer les coefficients de l'équation qui a ces m termes pour racines.

(Voir les observations instructives de M. Cirotte, tome I, p. 106)

Tm.