

HENRI D'ANDRÉ

Théorème sur les diamètres conjugués

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 209-210

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__209_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉOREME

sur les diamètres conjugués.

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,

élève de l'institution Laville.

—

Théorème. Considérant comme coordonnées rectangulaires d'un point, les rayons de courbure des extrémités des diamètres conjugués d'une même ellipse, le lieu du point est l'enveloppe d'une droite de longueur constante inscrite dans un angle droit (Brassine, t. IV, p. 560).

Démonstration. Le rayon de courbure d'une ellipse a pour expression $R = \frac{(a^4 - c^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}$; l'ellipse est rapportée aux axes principaux. Cela posé, soient x', y' les coordonnées des extrémités d'un diamètre de l'ellipse. L'équation du diamètre conjugué sera $y = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x$, et si l'on cherche l'abscisse de son extrémité, on a $x = \pm \frac{a y'}{b}$. Par conséquent, en désignant par x et y les coordonnées courantes du lieu cherché on aura :

$$y = \frac{\left(a^4 - \frac{a^2 c^2 y'^2}{b^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b} \quad (1); \quad x = \frac{(a^4 - c^2 x'^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b} \quad (2)$$

avec la relation $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 - a^2 b^2 = 0$, (3)

entre lesquelles équations il n'y a plus qu'à éliminer x', y' .

L'équation (1) devient $(a^4 b^2 - a^2 c^4 y'^2) = \sqrt[3]{a^2 b^3 y^2}$ remplaçant $a^2 y'^2$ par sa valeur tirée de l'équation (3) et supprimant le facteur commun b^2 il vient :

$$a^3 b^3 + c^3 x'^3 = \sqrt[3]{a^8 b^4 y^3}.$$

Mais l'équation (2) donne $a^4 - c^3 x'^2 = \sqrt[3]{a^8 b^3 x^2}$, et en ajoutant il vient finalement après la suppression du facteur a^3 :

$$a^3 + b^3 = \sqrt[3]{a^2 b^2} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}),$$

ou bien $\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{\frac{(a^3 + b^3)^6}{a^2 b^2}}; \quad \text{C. Q. F. D.}$

Nota. MM. Woestyn et Vauquelin nous ont adressé depuis une solution qui ne diffère pas essentiellement de celle de M. d'André.