

Détermination de la fraction continue périodique à un terme, en fonction du nombre des fractions. D'après M. Clausen (Th.) d'Altona

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 203-204

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__203_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINATION

de la fraction continue périodique à un terme, en fonction du nombre des fractions.

D'après M. Clausen (Th.) d'Altona (*Journ. de Crelle*, t. 3, p. 87).

—

Soit la fraction continue $1 : a + 1 : a + 1 : a + \dots$ et n le nombre de ces fractions ; soit $\varphi(n)$ la valeur de cette

fraction, on a évidemment $\varphi(n+1) = \frac{1}{a + \varphi(n)}$; ou

$$\varphi(n) \cdot \varphi(n+1) + a\varphi(n+1) = 1, \quad (1)$$

posons :

$$F(n) = \frac{1}{\varphi(n)\varphi(n-1)\varphi(n-2)\dots\varphi(1)};$$

ainsi l'équation (1) donne $F(n-1) + aF(n) = F(n+1)$.

On satisfait à cette équation en posant $F(n) = K\beta^n$; et on trouve pour déterminer β l'équation $\beta^2 - a\beta - 1 = 0$; désignons par β' et β'' les racines de cette équation. Il vient :

$F(n) = K\beta^n + K'\beta'^n$; or $F(0) = 1$; $F(1) = a$; donc

$$1 = K + K'$$

$$a = K\beta' + K'\beta''$$

d'où

$$K = \frac{\beta'' - a}{\beta'' - \beta'}; \quad K' = \frac{a - \beta'}{\beta'' - \beta'};$$

et

$$F(n) = \frac{1}{\beta'' - \beta'} [(\beta'' - a)\beta'^n + (a - \beta')\beta''^n];$$

mais :

$$\varphi(n) = \frac{F(n-1)}{F(n)}; \text{ donc } \varphi(n) = \frac{(\beta'' - a)\beta'^{n-1} + (a - \beta')\beta''^{n-1}}{(\beta'' - a)\beta'^n + (a - \beta')\beta''^n}.$$

comme on a $\beta'\beta'' = 1$, il vient :

$$\varphi(n) = \frac{\beta'^{n-1} - \beta''^{n-1} - a(\beta'^{n-1} - \beta''^{n-1})}{\beta'^{n-1} - \beta''^{n-1} - a(\beta'^n - \beta''^n)}. \quad (3)$$

Cette fonction est symétrique, relativement aux racines β' , β'' , elle est donc rationnelle en a ; et on ne peut avoir $\beta' = \beta''$ à moins que $a = 0$; ce cas est exceptionnel. On a l'équation $\varphi(m+n) = \frac{\varphi(m) + \varphi(n) - a\varphi(m)\varphi(n)}{1 + \varphi(m)\varphi(n)}$; la substitution dans l'équation (3) suffit pour démontrer cette identité.

Note. 1° Les propriétés des fractions continues, comprise celle qu'on vient de lire; 2° les théories des plus grands communs diviseurs, numériques et algébriques; 3° la méthode d'élimination de Bret, pour deux équations à deux inconnues; 4° l'analyse indéterminée du premier et du second degré; 5° la théorie des séries récurrentes; 6° l'intégration de certaines équations aux différences finies, sont des opérations identiques et conséquences immédiates d'un algorithme proposé par Euler, pour exprimer une fraction continue. (*Voir Journal des Mathématiques de M. Liouville.*)

Nous reproduirons ce travail, avec quelques changements dans les Annales. Tm.