

Solution de la question 96

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 199-201

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__199_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 96 (t. IV, p. 260).

PAR UN ÉLÈVE

du collège royal militaire de La Flèche.

Si dans l'angle de deux droites prises pour axes de coordonnées, on inscrit une ligne polygonale régulière, ayant l'origine pour centre, on aura entre les abscisses à l'origine $x', x'', x''' \dots x^{(n)}$ des côtés du polygone et l'ordonnée Y du premier sommet à partir de l'axe des x la relation :

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \frac{1}{x'''} + \dots + \frac{1}{x^{(n)}}.$$

Soit n le nombre des côtés de la ligne polygonale comprise dans l'angle des axes. Je désigne par θ (*fig. 26*), la $2^{n^{\text{ème}}}$ partie de l'angle des axes; si de l'origine j'abaisse sur les milieux des côtés des perpendiculaires et que je prolonge ces côtés jusqu'à leur rencontre avec l'axe des x , j'obtiendrai des triangles rectangles dont les hypoténuses seront

$$x', x'', x''', \dots x^{(n)},$$

et qui auront tous un côté de l'angle droit commun, savoir la distance de l'origine aux côtés du polygone; je la désigne par r ; ces triangles me donneront :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x'} &= \frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{1}{x''} &= \frac{\cos 3\theta}{r} \\ \frac{1}{x'''} &= \frac{\cos 5\theta}{r}; \end{aligned}$$

posant pour abréger :

$$S = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \frac{1}{x'''} + \dots + \frac{1}{x^{(n)}}; \quad \frac{1}{x^{(n)}} = \frac{\cos(2n-1)\theta}{r};$$

et ajoutant ces égalités membre à membre, j'aurai :

$$(A) \quad rS = \cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \dots + \cos (2n-1)\theta.$$

D'un autre côté évaluant r en fonction de Y , on a :

$$r = \frac{Y \sin 2n\theta}{2\sin \theta};$$

Remplaçant r par sa valeur dans l'équation (A) elle devient :

$$SY = \frac{2\sin \theta}{\sin 2n\theta} [\cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \dots + \cos (2n-1)\theta].$$

Je vais prouver que le second membre de cette égalité n'est autre chose que l'unité.

Pour cela je me sers des formules générales :

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

e , étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1.

On a donc :

$$\frac{2 \sin \theta}{\sin 2n\theta} = \frac{2(e^{\theta\sqrt{-1}} - e^{-\theta\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}{e^{2n\theta\sqrt{-1}} - e^{-2n\theta\sqrt{-1}}}.$$

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (2n-1)\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{3\theta\sqrt{-1}} + \dots + e^{(2n-1)\theta\sqrt{-1}} \right. \\ \left. + e^{-\theta\sqrt{-1}} + e^{-3\theta\sqrt{-1}} + \dots + e^{-(2n-1)\theta\sqrt{-1}} \right\};$$

donc

$$\frac{2 \sin \theta [\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (2n-1)\theta]}{\sin 2n\theta} =$$

$$= \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \left\{ e^{i\theta} + e^{3i\theta} + \dots + e^{(2n-1)i\theta} \right.}{e^{2ni\theta} - e^{-2ni\theta}}$$

Je multiplie $\left\{ \begin{array}{l} e^{i\theta} + e^{3i\theta} + \dots + e^{(2n-1)i\theta} \\ + e^{-i\theta} + e^{-3i\theta} + \dots + e^{-(2n-1)i\theta} \end{array} \right.$

par $e^{i\theta} - e^{-i\theta}$. J'ai :

$$\left\{ \begin{array}{l} + e^{2i\theta} + e^{4i\theta} + \dots + e^{2(n-1)i\theta} + e^{2ni\theta} \\ + 1 + e^{-2i\theta} + \dots + e^{-2(n-1)i\theta} \\ - 1 - e^{-2i\theta} - \dots - e^{-2(n-1)i\theta} \\ - e^{-2i\theta} - e^{-4i\theta} - \dots - e^{-2ni\theta} \end{array} \right.$$

il est facile de voir que tous les termes se détruisent à l'exception de $e^{2ni\theta} - e^{-2ni\theta}$,

donc :

$$\frac{2 \sin \theta [\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (2n-1)\theta]}{\sin 2n\theta} = \frac{e^{2ni\theta} - e^{-2ni\theta}}{e^{2ni\theta} - e^{-2ni\theta}} = 1$$

donc enfin : $SY = 1$.

ou $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \frac{1}{x'''} + \dots + \frac{1}{x^{(n)}} = \frac{1}{Y}$.

Note. M. Lecoq est parvenu directement à démontrer que le second membre de SY est égal à l'unité (t. III, p. 524, éq. 3). Tm.