

TERQUEM

**Théorème de trigonométrie sphérique.
Construction de l'excès sphérique**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 17-23

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__17_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Construction de l'excès sphérique.

Observation. Dans tout ce qui suit , il n'est question que de grands cercles.

I. *Théorème.* Une transversale coupant les trois côtés d'un triangle sphérique , y forme six segments ; en comptant ces segments dans le même ordre , le produit des sinus des segments de rang pair est égal au produit des sinus des segments de rang impair , et réciproquement , lorsque cette égalité subsiste , les trois points pris sur les côtés sont sur un même grand cercle.

II. *Théorème.* Si d'un même point de la sphère on mène un arc à chaque sommet d'un triangle , ces trois cercles forment sur les côtés des triangles six segments ; en les comptant dans le même sens , le produit des sinus des segments de rang pair est égal au produit des sinus des segments de rang impair , et réciproquement , lorsque cette égalité subsiste , les trois arcs de grand cercle passent par le même point.

Observation. Ces deux théorèmes fondamentaux , très-connus , se démontrent comme les théorèmes analogues pour le triangle rectiligne , en substituant aux segments rectilignes les sinus des segments circulaires. Le premier est dans l'Almageste de Ptolémée.

III. *Théorème.* Les trois arcs qui vont des sommets aux milieux des côtés respectivement opposés passent par le même point.

IV. *Théorème.* Les trois arcs bissecteurs des angles du triangle passent par le même point.

V. *Théorème.* Les trois hauteurs du triangle passent par le même point.

Observation. Les trois derniers théorèmes sont des corollaires immédiats du théorème II.

VI. *Théorème.* Les trois arcs menés perpendiculairement aux milieux des côtés d'un triangle passent par le même point.

Démonstration. Ce point est le pôle du cercle circonscrit au triangle.

VII. *Théorème.* Les trois arcs qui, partant des sommets du triangle, divisent son aire en deux parties équivalentes, se rencontrent en un même point. (Voy. tome IV, p. 587.)

VIII. *Théorème (Fig. 5).* Si sur les côtés AB, AC du triangle ABC, on prend les points M et N, tels que l'on ait $\frac{\sin AM}{\sin MB} = \frac{\sin AN}{\sin NC}$; menant les arcs MC, NB se coupant au point P, l'arc AP coupe le côté BC en un point Q, milieu de BC, et les arcs BV, CT, abaissés perpendiculairement sur MN sont égaux; prolongeant l'arc MN jusqu'à ce qu'il coupe l'arc BC en R, on a $QR = 1^g$.

Démonstration. 1° Les trois arcs AQ, BN, CM, passant par le même point P, on a (théor. II) :

$$\sin AM \cdot \sin BQ \cdot \sin NC = \sin BM \cdot \sin QC \cdot \sin AN, ,$$

$$\text{or} \quad \sin AM \cdot \sin NC = \sin MB \cdot \sin AN. ;$$

$$\text{donc } BQ = QC.$$

2° MNR étant une transversale, on a (théor. I) :

$$\sin AM \cdot \sin BR \cdot \sin NC = \sin BM \cdot \sin CR \cdot \sin AN ;$$

$$\text{d'où} \quad \sin BR = \sin CR ; \text{ d'où } BR + CR = 2^g ;$$

ou $QR + BQ + QR - QC = 2^a$;
d'où $QR = 1^a$.

3° Les triangles CTR, BVR, rectangles en T et en V, donnent :

$$\sin CT = \sin CR \cdot \sin R ; \sin BV = \sin BR \cdot \sin R ;$$

or $\sin BR = \sin CR$; donc $BV = CT$.

Corollaire. Si M et N sont les points milieux respectifs de AB et AC, toutes les propriétés énoncées ont lieu.

IX. Théorème. Le cosinus de l'arc qui va du sommet d'un angle d'un triangle au milieu du côté opposé (arc médian), est égal à la somme des cosinus des cotés de l'angle, divisé par le double des cosinus de la moitié du côté opposé.

Démonstration. Soit le triangle ABC (fig. 5) ; N le milieu de AC ; AB = c ; BC = a ; AC = b ; BN = x ; les triangles BCN, BCA donnent :

$$\cos C = \frac{\cos x - \cos a \cos \frac{1}{2} b}{\sin a \sin \frac{1}{2} b} = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} ;$$

d'où :

$$\cos x = \frac{\cos a + \cos c}{2 \sin \frac{1}{2} b} ; \quad \text{C. Q. F. T.}$$

X. Théorème. La somme des cosinus des côtés d'un triangle, augmentée d'une unité et divisée par quatre fois le produit des cosinus des demi-côtés, est égale au cosinus du demi-excès.

Démonstration. Soit e l'excès ; on a $e = 2^a - A - B - C$; faisons

$$M = 4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c ;$$

on a :

$$\sin \frac{1}{2} c = \frac{\sin A \sin b \sin c}{M}$$

$$\begin{aligned} M^2 \cos^2 \frac{1}{2} c &= M^2 - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = \\ &= 2(1 + \cos a)(1 + \cos b)(1 + \cos c) - \\ &\quad - (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) + (\cos a - \cos b \cos c)^2 \\ &= 2(1 + \cos a)(1 + \cos b)(1 + \cos c) - 1 + \cos^2 a + \cos^2 b + \\ &\quad + \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c = (1 + \cos a + \cos b + \cos c)^2, \\ \text{d'où } \cos \frac{1}{2} c &= \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{M}, \text{ C. Q. F. D. (Voir} \end{aligned}$$

Legendre, *Géométrie*, note X.)

XI. Théorème. Le cosinus de l'arc qui joint les milieux des deux côtés d'un triangle divisé par le cosinus de la moitié du côté opposé est égal au cosinus du demi-excès.

Démonstration. Soient M et N respectivement les milieux des côtés AB et AC ; d'après le théorème IX, on a dans le triangle ABN :

$$\cos MN = \frac{\cos BN + \cos \frac{1}{2} b}{2 \cos \frac{1}{2} c},$$

et le même théorème donne dans le triangle ABC :

$$\cos BN = \frac{\cos a + \cos c}{2 \cos \frac{1}{2} b};$$

donc

$$\begin{aligned} \cos MN &= \frac{\cos a + \cos c + 2 \cos^2 \frac{1}{2} b}{4 \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} = \\ &= \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}; \end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{\cos MN}{\cos \frac{1}{2} a} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} = \cos \frac{1}{2} e, \text{ C. Q. F. D.}$$

Remarque. Je ne sache pas que cette proposition soit déjà énoncée.

XII. Théorème. M et N étant les milieux des côtés AB et AC, R le point de rencontre des deux arcs MN et BC ; si , à partir du point R, on porte sur RN, l'arc DR = MN , et sur RC, l'arc RE = $\frac{1}{2}$ BC, on forme le triangle DER rectangle en E, et DE sera le demi-excès (*Fig. 6*).

Démonstration. Soit O le pôle de l'arc MN ; menons les arcs OVB, OTC ; les angles V et T sont droits, donc BV = CT (VIII), OB = OC ; donc l'arc bissecteur OSQ passe par le milieu S de VT et le milieu Q de BC, et les angles Q et S sont droits ; donc R est le pôle de l'arc QSO. Abaissons de A l'arc AK perpendiculaire sur MN, les deux triangles rectangles ANK, CNT ont une hypoténuse égale et un angle égal ; donc KN = NT, et pour la même raison, KM = MV ; ainsi $MN = \frac{1}{2} VT = VS$; donc DV = RS = 1^q . Mais V est un angle droit ; donc D est le pôle de l'arc BVO, et BD = 1^q . Mais BE = RQ = 1^q ; donc B est le pôle de DE, et l'angle E est droit ; d'où $\cos DE = \frac{\cos DR}{\cos ER} = \frac{\cos MN}{\cos \frac{1}{2} BC}$. Donc, en vertu

du théorème précédent, DE est égal au demi excès.

Remarque. Cette belle construction est de M. le professeur Gudermann, de Clèves. (Crelle, t. VI et VIII, 1830.)

XIII. Lemme. Si d'un point fixe on abaisse des perpendiculaires sur un système de droites convergentes vers le même point, les pieds des perpendiculaires sont sur une surface sphérique ; si ce système de droites est dans un même plan,

les pieds des perpendiculaires sont sur une même circonférence ; et en prolongeant chacune de ces perpendiculaires d'une longueur égale à elle-même , les extrémités sont sur une circonférence dont le plan est parallèle à celui du système des droites.

XIV. Théorème. Si d'un point fixe pris sur une sphère , on mène des arcs de grands cercles aux points d'un grand cercle donné , et qu'on prolonge chacun de ces arcs d'une longueur égale à l'arc , les extrémités sont sur un petit cercle dont le plan est parallèle à celui du grand cercle donné.

Démonstration. C'est un corollaire du lemme précédent.

XV. Théorème. Si un grand cercle parallèle à un petit cercle passe par le milieu d'un arc mené d'un point fixe à un point du petit cercle , il divise aussi en deux parties égales les arcs menés du point fixe à un point quelconque du petit cercle.

XVI. Théorème. Les sommets des triangles sphériques de même base et de même aire sont sur la circonférence d'un petit cercle. Les milieux des côtés variables sont sur un même grand cercle parallèle au petit cercle.

Démonstration. Soit A' (Fig. 6) un point quelconque du petit cercle passant par A parallèlement au cercle VTR ; les arcs $A'B$ et $A'C$ seront divisés en deux parties égales par le grand cercle , en M' et N' (XV) ; les perpendiculaires CT , BV restent fixes , et l'arc $M'N'$ est toujours la moitié de l'arc VT : par conséquent $M'N'$ est constant , et le cosinus du demi-excès égal à $\frac{\cos M'N'}{\cos \frac{1}{2}BC}$ est aussi constant ; donc l'aire est con-

stante. C. Q. F. D.

Remarque. La première partie de cette proposition est le théorème de Lexell ; en doublant le quadrant BD , on a le point diamétralement opposé à B et appartenant au petit

cercle ; ce qui s'accorde avec la construction de M. Steiner (voir t. IV, p. 587).

XVII. Théorème. Un polygone sphérique d'un nombre de côtés pairs étant circonscrit à un petit cercle, la somme des côtés de rang pair est égale à la somme des côtés de rang impair.

Démonstration. Deux arcs de grand cercle menés d'un même point tangentiellement à un petit cercle, sont égaux ; donc, etc.

XVIII. Lemme. Un polygone sphérique étant inscrit dans un petit cercle, le polygone polaire est circonscrit à un petit cercle parallèle au premier.

XIX. Un polygone d'un nombre de côtés pair étant inscrit dans un petit cercle, la somme des angles d'un rang pair est égale à la somme des angles d'un rang impair.

Démonstration. Le polygone polaire étant circonscrit à un petit cercle, la somme des côtés de rang pair est égale à la somme des côtés de rang impair ; or ces côtés sont les suppléments des angles correspondants. Donc, etc.

XX. En général, toute proposition, toute formule sur les côtés et les angles d'un polygone sphérique, en fournit un second, au moyen du polygone polaire ; mais quelquefois les deux propositions sont identiques, lorsque les quantités entrent symétriquement dans la formule.