

TERQUEM

**Sur la résolution d'une certaine classe
d'équations à plusieurs inconnues
du premier degré**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 162-165

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__162_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA RESOLUTION

*d'une certaine classe d'équations à plusieurs inconnues du
premier degré.*

(1^{re} suite, voir page 67.)

II. Soit le système de m équations

$$\begin{aligned}
 x_1 + 0.x_2 + x_3 + \dots + x_m &= b^{(0)}, \\
 a_1 x_1 + x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_m x_m &= b^{(1)}, \\
 a_1^2 x_1 + 2a_1 x_2 + a_3^2 x_3 + \dots + a_m^2 x_m &= b^{(2)}, \\
 \vdots \\
 a_1^n x_1 + n a_1^{n-1} x_2 + a_3^n x_3 + \dots + a_m^n x_m &= b^{(n)}, \\
 \vdots \\
 a_1^{m-1} x_1 + (m-1) a_1^{m-2} x_2 + \dots + a_m^{m-1} x_m &= b^{(m-1)}.
 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \dots, x_m$ sont m inconnues ; $a_1, a, \dots, a_m$ sont $m-1$ quantités *négaes* ; les seconds membres sont des quantités données quelconques ; les coefficients de x_2 sont les dérivées

respectives des coefficients de x_i , par rapport à a_i . Cela posé, soient $k, k', k'' \dots k^{(m-2)}$, $m-1$ constantes indéterminées, et faisons comme ci-dessus :

$$k + k'a + k'a^2 \dots k^{(m-2)}a^{m-2} + a^{m-1} = \varphi(a) ;$$

on aura :

$$x_1\varphi(a_1) + x_2\varphi'(a_1) + x_3\varphi(a_2) \dots + x_m\varphi(a_m) = kb^{(0)} + k'b^{(1)} + k''b^{(2)} \dots + b^{(m-1)}.$$

Faisons $f(a) = (a-a_1)^2(a-a_2)(a-a_3) \dots (a-a_m) = a^m + P^{m-1}a \dots$ déterminons $k, k', \dots k^{(m-2)}$, de telle sorte que fa et φa aient en commun les $m-1$ racines $a_1, a_2, a_3 \dots a_m$; on a donc :

$$\varphi(a) = \frac{f(a)}{a - a_i} = a^{m-1} + (P+a_i)a^{m-2} + \dots ;$$

ainsi $k, k' \dots k^{(m-2)}$ se trouvent déterminés, et l'on trouve :

$$x_1 = \frac{kb^{(0)} + \dots b^{(m-1)}}{\varphi'(a_1)} ;$$

or $(a-a_i)\varphi a = f(a)$; prenant les dérivées, $\varphi a + (a-a_i)\varphi' a = f'(a)$;

d'où l'on tire
$$\varphi'(a) = \frac{f'(a) - \varphi a}{a - a_i} ;$$

faisant $a = a_i$, il vient $\varphi'(a_i) = \frac{0}{0}$, et d'après la méthode connue,

$$\varphi'(a_i) = f''(a_i) ; \text{ donc } x_1 = \frac{kb^{(0)} \dots b^{(m-1)}}{f''(a_i)}$$

Connaissant x_1 , on fait passer les termes où ils se trouvent dans le second membre, et on est ramené à un système d'équations déjà traitées.

III. Si les coefficients de x_2 étaient les dérivées premières, et les coefficients de x_3 les dérivées secondes des coefficients de x_1 , on ferait $f(a) = (a-a_1)^3(a-a_2)(a-a_3) \dots a-a_m$; et raisonnant de la même manière, on trouvera la valeur de x_3 ; et transportant ces termes dans les seconds membres, on a ramené au système d'équations précédent.

IV. On voit donc comment il faut procéder lorsque les

coefficients d'une inconnue sont les dérivées de l'inconnue précédente.

Observation. Ce genre d'équations se présente dans l'intégration de l'équation linéaire, à coefficients constants, lorsque l'équation auxiliaire a des racines égales.

V. Soit le système suivant de n équations du premier degré entre les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a_1 - \alpha_1} + \frac{x_2}{a_1 - \alpha_2} + \dots + \frac{x_n}{a_1 - \alpha_n} &= 1, \\ \frac{x_1}{a_2 - \alpha_1} + \frac{x_2}{a_2 - \alpha_2} + \dots + \frac{x_n}{a_2 - \alpha_n} &= 1, \quad (A) \\ \vdots \\ \frac{x_1}{a_n - \alpha_1} + \frac{x_2}{a_n - \alpha_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n - \alpha_n} &= 1. \end{aligned}$$

$a_1, \dots, a_n$ sont n quantités connues, mais *inégales* ; de même les n quantités $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Faisons $F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$,

$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$;

$F(x) - f(x)$ est de degré $n - 1$, et par conséquent $\frac{F(x) - f(x)}{f(x)}$

peut se décomposer, par la méthode des dérivées, en fonctions rationnelles (V. t. IV, p. 296) ; on a donc l'identité :

$$\frac{F(x) - f(x)}{F(x)} = \frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)} \cdot \frac{1}{x_1 - \alpha_1} - \frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)} \cdot \frac{1}{x_2 - \alpha_2} + \dots$$

Faisant successivement $x = a_1$; $x = a_2, \dots, x = a_n$, on obtient les n identités :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{-f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)} \cdot \frac{1}{a_1 - \alpha_1} - \frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)} \cdot \frac{1}{a_2 - \alpha_2} + \dots \\ 1 &= -\frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)} \cdot \frac{1}{a_2 - \alpha_1} - \frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)} \cdot \frac{1}{a_2 - \alpha_2} + \dots \\ &\vdots \\ 1 &= -\frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)} \cdot \frac{1}{a_n - \alpha_1} + \dots \end{aligned}$$

Donc les valeurs $x_1 = -\frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)}$; $x_2 = -\frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)}$, etc. satisfont au système des équations (A).

Si, parmi les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, il y en a d'égales, on fait la décomposition en fractions rationnelles, comme pour le cas des facteurs multiples, et le reste comme ci-dessus.

Observation. Ce genre d'équations se présente dans la théorie des surfaces homofocales, expression hybride, qu'on pourrait remplacer par *biconfocales*. L'élégant procédé d'élimination est dû à M. le professeur Jacques Binet. (*Suite*).
