

WOESTYN

VAUQUELIN

Problème d'optique

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 144-146

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__144_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME D'OPTIQUE.

PAR MM. WOESTYN ET VAUQUELIN ,

Élèves de l'École normale.

Soit une droite AB (*fig. 18*), donnée de grandeur et de position dans un plan horizontal. Considérons le point A comme

un élément de la surface de ce plan horizontal. Soit alors une droite BC située dans le plan vertical qui passe par AB. En faisant glisser sur BC une lumière d'intensité constante, il y a une position M du point lumineux pour lequel l'éclairement produit en A est le plus grand possible. On demande le lieu des points M satisfaisant à cette condition, quand la droite BC prend toutes les positions possibles autour du point B dans le plan vertical.

Nous traiterons la question en coordonnées polaires. Soit donc A le pôle, AB l'axe polaire. Je pose :

$$MAB = \omega; \quad MBA = \theta; \quad AM = \rho; \quad AB = \alpha.$$

En représentant par 1 la quantité de lumière qu'envoie le point lumineux à l'unité de distance, et sur une surface sur laquelle le rayon tombe perpendiculairement, la quantité de lumière reçue par le point A sera :

$$\frac{\sin \omega}{\rho^2}. \quad (1)$$

Telle est l'expression qu'il faut rendre maximum.

Le triangle AMB donne :

$$\frac{\rho}{\alpha} = \frac{\alpha \sin \theta}{\sin (\omega + \theta)} = \frac{\alpha \sin \theta}{\sin \omega \cos \theta + \sin \theta \cos \omega} = \frac{\alpha}{\sin \omega \cot \theta + \cos \omega},$$

$$\text{d'où :} \quad \rho = \frac{\alpha}{\sin \omega \cot \theta + \cos \omega}. \quad (2)$$

L'expression (1) devient alors :

$$\frac{\sin \omega (\sin \omega \cot \theta + \cos \omega)^2}{\alpha^2}.$$

Et comme α^2 est constant, il suffit de rendre maximum l'expression $\sin \omega (\sin \omega \cot \theta + \cos \omega)^2$. Pour cela il faut égaliser à 0 la dérivée de cette expression, ce qui donne en faisant les réductions :

$$(\sin \omega \cot \theta + \cos \omega) (3 \cos \omega \sin \omega \cot \theta + 1 - 3 \sin^2 \omega) = 0. \quad (3)$$

En donnant à θ une valeur particulière, cette équation fera connaître ω , et par suite l'équation (2) donnera ρ , de sorte que le point M sera déterminé, et si l'on élimine θ entre (2) et (3), on aura l'ensemble de tous les points M qui satisfont à la condition demandée. Or l'équation (3) donne :

$$\cot \theta = -\frac{\cos \omega}{\sin \omega} \quad \text{et} \quad \cot \theta = \frac{3 \sin^2 \omega - 1}{3 \sin \omega \cos \omega}.$$

La première valeur donnant toujours pour ρ une valeur infinie est inadmissible, et la seconde donne :

$$\rho = \frac{3a \cos \omega}{2};$$

équation d'un cercle qui passe au point A, et dont le diamètre est $\frac{3a}{2}$.

Ce cercle répond bien aux points qui donnent un éclaircissement maximum. Car, en cherchant la seconde dérivée de $\frac{\sin \omega}{\rho} (\sin \omega \cot \theta + \cos \omega)^2$, et en y mettant la valeur de

$$\cot \theta = \frac{3 \sin^2 \omega - 1}{3 \sin \omega \cos \omega},$$

cette seconde dérivée se réduit à : $-\frac{2}{3} \frac{1 + \sin^2 \omega}{\sin \omega \cos^2 \omega}$.

Or, pour avoir tous les points de la courbe, il suffit de faire varier ω depuis 0° jusqu'à 180° , et dans cet intervalle le sinus est toujours positif. Donc, la seconde dérivée est négative, et par conséquent, il y a maximum.

Note. Le point B étant fixe et la droite BC quelconque, le lieu du point M est une sphère, passant par le point A, ayant son centre sur AB, et pour diamètre $\frac{3a}{2}$. Tm.