

TERQUEM

Note sur les racines imaginaires

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 141-144

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__141_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

sur les racines imaginaires.

Remarque. Ce qui suit est une réponse à une question adressée par un abonné. Nous engageons les élèves à nous communiquer les difficultés qu'ils peuvent rencontrer. La publicité des réponses est un moyen d'être utile à tous, et de plus elle provoque la discussion, et, s'il y a lieu, des observations critiques sur les explications.

Pour remonter à l'origine du symbole imaginaire, il est nécessaire d'avoir recours à quelque préambule.

La *résolution* des équations est l'objet principal de l'algèbre. Lorsqu'on a autant d'équations que d'inconnues, l'élimination apprend à les réduire à l'équation où ne figure qu'une inconnue, et cette équation peut toujours être mise sous la forme d'une équation dont un membre est un polynôme entier en x (l'inconnue) et dont l'autre membre est zéro. De sorte que la résolution des équations algébriques est ramenée à découvrir les valeurs de x qui annulent un polynôme donné. Or il est de principe que lorsque dans un produit un des facteurs est nul, quels que soient d'ailleurs les autres facteurs, tous *entiers*, le produit est toujours nul. On est donc naturellement conduit à chercher à décomposer le polynôme en facteurs de moindre degré possible, et par conséquent, s'il y a moyen, en facteurs du premier degré. Ainsi la résolution des équations dépend en dernière analyse de la décomposition

des polynômes en facteurs. Les algébristes sont parvenus à démontrer qu'il y a trois classes de polynômes.

1^{re} classe. Polynômes décomposables en autant de facteurs du premier degré qu'il y a d'unités dans l'exposant du degré.

2^e classe. Polynômes décomposables en facteurs du premier degré et en facteurs du deuxième degré, eux-mêmes indécomposables.

3^e classe. Polynômes décomposables seulement en facteurs du deuxième degré indécomposables.

On sait, de plus, que les polynômes de degré pair peuvent renfermer les trois classes; mais la troisième classe est exclue des polynômes de degré impair.

Ensuite tout facteur du premier degré peut se mettre sous la forme $x - a$, où a est rationnel ou irrationnel; et tout facteur du second degré *indécomposable* est nécessairement de la forme $(x - \alpha)^2 + \beta^2$, α et β étant des nombres rationnels ou irrationnels.

Ces deux genres de facteurs ne jouent pas le même rôle dans la résolution des équations; le premier genre de facteurs résolvent le polynôme en posant $x = a$; ce sont les vraies solutions dans le véritable sens du mot. Pour les seconds facteurs, il n'en est pas ainsi. Il faut remplacer partout x^2 par $2\alpha x - \alpha^2 - \beta^2$, et opérer ce remplacement jusqu'à ce que le polynôme soit réduit à un polynôme du premier degré de la forme $Ax + B$, et on aura alors identiquement $A = 0$ et $B = 0$.

Par exemple, x^5 donnera d'abord $(2\alpha x - \alpha^2 - \beta^2)^2 x = 4\alpha^2 x^3 - 4\alpha(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha^4 + \beta^4)x = 4x^3[\alpha - 4\alpha(\alpha^2 + \beta^2)] + (\alpha^4 + \beta^4)x$. On remplace de nouveau x^3 par $2\alpha x - \alpha^2 - \beta^2$, et ainsi de suite. On voit donc que les facteurs du deuxième degré fournissent d'autres genres de solution. Ces facteurs ne fournissent pas de solutions proprement dites, puisqu'aucune valeur ne répond à x , il s'agit de savoir si on ne pour

rait abréger l'opération si longue de la substitution par x^2 et la ramener à une substitution par x seulement. On y parvient au moyen de la convention suivante : le facteur du second degré $(x-\alpha)^2-\beta^2$ est décomposable en deux facteurs $(x-\alpha+\beta)$ et $x-\alpha-\beta$. On décompose de même $(x-\alpha)^2+\beta^2$ en deux facteurs $x-\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $x-\alpha-\beta\sqrt{-1}$. Le signe $\sqrt{-1}$, qu'on prononce *racine moins un*, indique que, dans la multiplication, on doit poser $\beta\sqrt{-1} \cdot -\beta\sqrt{-1} = +\beta^2$. Quoiqu'on prononce *racine moins un*, il n'y a là ni racine, ni unité négative : c'est purement un signe qui porte pour nom ces trois mots-là. L'avantage de cette notation consiste en ce qu'au lieu de remplacer x^2 , on peut mettre $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ dans le polynôme, et ayant égard à la convention, le polynôme renferme deux parties : l'une sans le signe $\sqrt{-1}$ et l'autre avec ce signe, et chacune s'annule d'elle-même. On aurait pu adopter tout autre signe et toute autre dénomination ; c'est l'*analogie* qui a déterminé ce choix. De même que $\beta\sqrt{1} \cdot \beta\sqrt{1} = \beta^2$, on a $\beta\sqrt{-1} \cdot \beta\sqrt{-1} = -\beta^2$. La première équation a un sens logique ; la seconde a un sens symbolique qui devient logique, en la rattachant à la décomposition en facteurs. Lorsque $\beta = 1$, alors $1\sqrt{-1} \cdot 1 \cdot \sqrt{-1} = -1$; et comme on supprime ordinairement l'unité lorsqu'elle entre comme facteur, on écrit $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$; dans cette équation, il faut toujours sous-entendre l'unité omise ; car la multiplication de deux signes est une extravagance.

De même, quand le polynôme a un facteur $x-\alpha$, qu'on appelle α une racine, parce qu'elle annule le polynôme ; on a, par *analogie*, donné le nom de racine à $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, lorsque $x-\alpha-\beta\sqrt{-1}$ est facteur ; et pour distinguer ce genre de racines, on les a surnommées *racines imaginaires* ; elles ont toutefois cette signification *réelle*, qu'elles indiquent l'exis-

tence de facteurs du second degré indécomposables, comme sont les nombres premiers en arithmétique. Lorsque le polynôme a plusieurs de ces facteurs, par exemple quatre, $(x - \alpha + \beta \sqrt{-1})(x - \alpha - \beta \sqrt{-1})(x - \gamma + \delta \sqrt{-1})(x - \gamma - \delta \sqrt{-1})$; ce produit peut s'exécuter de six manières différentes, et le résultat est toujours le même, pourvu qu'on reste fidèle à la convention $\beta \sqrt{-1} \cdot \gamma \sqrt{-1} = -\beta\gamma$.

On donne quelquefois aux racines imaginaires d'autres formes symboliques. Ainsi on a :

$$\alpha = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \cos \varphi; \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sin \varphi;$$

d'où $\alpha + \beta \sqrt{-1} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1}) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}\varphi}$.

Le facteur $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ pris positivement se nomme le *module* ou, selon Gauss, le *norme* de chacune des deux racines $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$, dites racines *conjuguées*. Les relations des imaginaires avec les lignes trigonométriques ont donné lieu à l'idée de représenter les *directions* par des imaginaires : on en parlera dans une autre occasion.

On a quelquefois des signes, tels que $\sqrt[4]{-1}$, provenant de l'équation $x^4 + 1 = 0$; mais on sait toujours ramener ces sortes de racines au type unique $\alpha + \beta \sqrt{-1}$.

M. Gauss représente $\sqrt{-1}$ par la lettre italique *i*, ce qui est plus commode, $\alpha \sqrt{-1} = \alpha i$. Tm.