

MENTION

Lieu géométrique relatif à l'intersection de deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 136-141

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__136_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LIEU GEOMÉTRIQUE

relatif à l'intersection de deux coniques.

PAR M. MENTION,

élève en spéciales.

PROBLÈME. Deux courbes du second degré passant par trois points, trouver le lieu géométrique du quatrième point d'intersection lorsque leurs axes principaux sont donnés de direction.

Solution. Soient M, N, P les trois points donnés ; je prends pour origine des coordonnées l'un de ces points, N par exemple, et pour axes les lignes qui joignent ce point aux deux autres. Soit β l'ordonnée du point qui est sur l'axe des y , α l'abscisse de celui qui est sur l'axe des x .

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

étant l'équation du second degré, nous obtiendrons l'équation générale des courbes passant par les trois points en posant :

$$\beta = -\frac{D}{A}, \quad \alpha = -\frac{E}{C}, \quad \text{d'où } D = -A\beta, \quad E = -C\alpha;$$

posant alors $\frac{B}{2A} = m$, $\frac{A}{C} = n$, l'équation sera :

$$y^2 + 2mxy + nx^2 - \beta y - \alpha x = 0.$$

Considérons donc maintenant deux courbes du second degré passant par les trois points :

$$\begin{aligned} y^2 + 2mxy + nx^2 - \beta y - \alpha x &= 0, \\ y^2 + 2m'xy + n'x^2 - \beta'y - \alpha'x &= 0. \end{aligned}$$

Si nous appelons α et α' les angles que les axes principaux de ces courbes font avec l'axe des x , on devra avoir $\alpha = \alpha' + 90^\circ$, ou $2\alpha = 2\alpha' + 180$, ou $\text{tang } 2\alpha = \text{tang } 2\alpha'$, ce qui introduirait encore le cas $\alpha = \alpha'$, cas où ils seraient encore parallèles; cherchons donc $\text{tang } 2\alpha$ et $\text{tang } 2\alpha'$, afin de les égaux. Or, lorsque les courbes du second degré sont telles que leurs équations sont privées du terme xy , l'axe de la courbe est parallèle aux axes des coordonnées, ces coordonnées étant rectangulaires; rapportons donc la courbe

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

à un système de coordonnées rectangulaires, on obtiendra

$$(A + C \cos^2 \theta - B \cos \theta) y^2 + (B \sin \theta - 2A \sin \theta \cos \theta) xy + \\ + C \sin^2 \theta x^2 + (Dy + Ex + F) \sin^2 \theta = 0,$$

de sorte que maintenant on a :

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{-B'}{A' - C'} = \frac{B \sin \theta - 2C \sin \theta \cos \theta}{B \cos \theta - A - C \cos 2\theta},$$

et si nous remplaçons B par 2m, A par 1, C par n :

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{2m \sin \theta - n \sin 2\theta}{2m \cos \theta - 1 - n \cos 2\theta},$$

nous devons avoir : $\text{tang } 2\alpha = \text{tang } 2\alpha'$, ou

$$\frac{2m \sin \theta - n \sin 2\theta}{2m \cos \theta - n \cos 2\theta - 1} = \frac{2m' \sin \theta - n' \sin 2\theta}{2m' \cos \theta - n' \cos 2\theta - 1}$$

d'où

$$(2m \sin \theta - n \sin 2\theta) (2m' \cos \theta - n' \cos 2\theta - 1) = \\ = (2m' \sin \theta - n' \sin 2\theta) (2m \cos \theta - n \cos 2\theta - 1),$$

$$\text{ou } 4mm' \sin \theta \cos \theta - 2m'n \sin 2\theta \cos \theta - 2mn' \sin \theta \cos 2\theta + \\ + nn' \cos 2\theta \sin 2\theta - 2m \sin \theta + n \sin 2\theta = \\ = 4mm' \sin \theta \cos \theta - 2mn' \sin 2\theta \cos \theta - 2m'n \sin \theta \cos 2\theta + \\ + nn' \cos 2\theta \sin 2\theta - 2m' \sin \theta + n' \sin 2\theta.$$

Réduisant et supprimant le facteur $2 \sin \theta$, qui n'est pas nul :

$$2m'n \cos^2 \theta + mn' \cos 2\theta + m - n \cos \theta = \\ = 2mn' \cos^2 \theta + m'n \cos 2\theta + m' - n' \cos \theta,$$

$$\text{ou } (m'n - mn') (2\cos^2 \theta - \cos 2\theta) + m - m' \\ - (n - n') \cos \theta = 0;$$

d'où, enfin,

$$m'n - mn' + m - m' - (n - n') \cos \theta = 0. \quad (A)$$

Éliminons donc m et m' entre cette équation et celle des

deux courbes. Or, si je multiplie la première équation de la courbe par m' , la seconde par m , et si je retranche, j'obtiens :

$$y(m' - m)(y - \beta) + (m'n - mn')(x - \alpha)x = 0.$$

Remplaçant $m'n - mn'$ par sa valeur tirée de l'équation (k),

$$y(m' - m)(y - \beta) + [(n - n') \cos \theta - (m - m')x](x - \alpha)x = 0;$$

$$\text{d'où } (m' - m)[y(y - \beta) + x(x - \alpha)] + (n - n') \cos \theta x(x - \alpha) = 0.$$

Or, en retranchant les équations des deux courbes, on trouve :

$$m - m' = \frac{(n - n')(x - \alpha)}{2y}.$$

Donc, enfin, l'équation du lieu sera :

$$[y(y - \beta) + x(x - \alpha)] + x \cos \theta = 0;$$

$$y(y - \beta) + x(x - \alpha) + 2xy \cos \theta = 0;$$

$$y^2 + 2xy \cos \theta + x^2 - \beta y - \alpha x = 0;$$

cercle qui passe par les trois points donnés. Donc les quatre points se trouvent sur une circonférence, et on en conclut que si les axes de deux courbes du second degré sont constamment perpendiculaires ou parallèles à des droites données, les quatre points d'intersection sont sur une circonférence.

Si l'on n'eût cherché ce problème que dans le cas de la parabole, on eût obtenu le même résultat plus simplement.

Car on arrive, en posant

$$Ay^2 + Bxy + \frac{B^2}{4A}x^2 + Dx + Ex + F = 0$$

pour équation des paraboles, à

$$y^2 + 2mxy + m^2x^2 - \beta y - m^2\alpha x = 0,$$

pour équation des paraboles passant par les trois points, de sorte que si on prend une autre parabole

$$y^2 + 2m'xy + m'^2x^2 - \beta y - m'^2ax = 0.$$

(On remarquera que $m = \frac{B}{2A}$, c'est-à-dire l'inclinaison de l'axe de la courbe sur l'axe des x .)

Donc il faudra exprimer que m et m' satisfont à la condition

$$1 + mm' - (m + m') \cos \theta = 0.$$

Or remarquons que dans ces deux équations, m est dans l'une ce que m' est dans l'autre ; de sorte que m et m' nous sont donnés par cette première équation, et on en tire :

$$m + m' = -\frac{2xy}{x^2 - ax} ; \quad mm' = \frac{y^2 - \beta y}{x^2 - ax} ;$$

d'où

$$1 + \frac{y^2 - \beta y}{x^2 - ax} + \frac{2xy \cos \theta}{x^2 - ax} = 0 \text{ ou } y^2 + 2xy \cos \theta + x^2 - \beta y - ax = 0$$

Note. Soit l'équation de la conique passant par les trois points $y^2 + 2mxy + nx^2 - \beta y - nax = 0$.

Le système des axes principaux est :

$$y^2(m - \cos \gamma) + xy(n - 1) + n \cos \gamma - m = 0 \text{ (t. I, p. 496).}$$

Les axes devant rester parallèles à eux-mêmes, on a donc

$$\frac{n - 1}{m - \cos \gamma} = p ; \quad \frac{n \cos \gamma - m}{m - \cos \gamma} = q ;$$

p et q étant des quantités constantes ; on tire de ces équations $n = 1$, $m = \cos \gamma$; substituant ces valeurs dans l'équation, on trouve $y^2 + 2 \cos \gamma xy + x^2 - \beta y - ax = 0$, équation d'un cercle, lieu géométrique du point cherché.

Ainsi, la conique qui passe par les quatre sommets d'un quadrilatère inscriptible a des axes principaux d'une direction constante ; ce qui d'ailleurs est évident *a priori*. En effet, en vertu du théorème sur les segments, dans chacune de ces coniques les diagonales du quadrilatère sont parallèles à des

diamètres *égaux* ; donc les directions des axes principaux divisent les angles des diagonales en parties égales. Donc ces directions sont constantes. Tm.