

A. CROSSON

**Note sur le rapport de la circonférence
au diamètre, et sur le calcul de
radicaux superposés**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 128-131

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__128_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur le rapport de la circonférence au diamètre, et sur le calcul de radicaux superposés.

PAR M. A. CROSSON,

Professeur au collège de Bourges.

En partant des relations qui permettent, étant données les aires des polygones inscrit et circonscrit à un même cercle, de calculer les aires des polygones inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double, M. Catalan a fait voir (t. I, p. 191) que les aires des polygones successifs inscrits, sont les termes d'une suite telle que le carré de chaque terme est égal au double du cube du terme précédent, divisé par la somme faite de celui-ci et du terme précédent.

Si l'on représente par A, A', A'' , les aires de trois polygones successifs inscrits; par B, B', B'' les aires des polygones semblables circonscrits, on sait qu'on a les relations :

$$\begin{aligned} A'^2 &= AB, & A''^2 &= A'B', \\ B' &= \frac{2AB}{A + A'}, & B'' &= \frac{2A'B'}{A' + A''}. \end{aligned}$$

Éliminons B' et B entre les trois premières, on arrive à l'égalité $A'^{1/2} = A' \cdot \frac{2A^2}{A + A'} = \frac{2A^3}{A + A'}$.

Si on fait le même calcul sur les périmètres des polygones successifs inscrits et circonscrits, on arrive à ce résultat remarquable que les périmètres des polygones successifs inscrits suivent identiquement la même loi que les aires de ces mêmes polygones.

Désignons par P, P', P'' les périmètres de trois polygones successifs inscrits ; par Q, Q', Q'' les périmètres des polygones semblables circonscrits, on a les relations :

$$Q' = \frac{2PQ}{P + Q}, \quad Q'' = \frac{2P'Q'}{P' + Q'}, \\ P'' = P \cdot Q', \quad P'^2 = P' \cdot Q''.$$

Éliminons Q' et Q'' entre les trois dernières, on obtient :

$$P'^2 = P' \cdot \frac{P' + Q'}{2P'Q'},$$

et en remplaçant Q' par $\frac{P^2}{P'}$, on trouve : $P'^2 = \frac{2 \cdot P^3}{P + P'}$.

Si on fait le calcul en partant de l'hexagone inscrit, on arrive facilement à la relation $2\pi = 6 \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{2}{c} \dots$

En posant, pour abrégé,

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = a, \quad \sqrt{a + 2} = b, \quad \sqrt{b + 2} = c, \text{ etc.}$$

Résultat de même forme que celui qu'a obtenu M. Catalan, en partant de l'aire du carré inscrit.

En s'arrêtant au $n^{\text{ème}}$ facteur, on aurait le périmètre du polygone inscrit, dont le nombre des côtés serait marqué par 6×2^n . Or on sait que $Q_m - P_m < \frac{1}{4^m} (Q - P)$; Q_m et P_m , désignant les périmètres des polygones obtenus en doublant successivement m fois le nombre des côtés des polygones

dont les périmètres sont Q et P. Dans le cas qui nous occupe $Q - P$ est < 1 . Donc, en s'arrêtant au $n^{\text{ème}}$ facteur le périmètre du polygone obtenu différera de la circonférence de moins de $\frac{1}{4^n}$; et par conséquent on pourra calculer π à moins de $\frac{1}{2 \cdot 4^n}$ près. (Voir t. IV, p. 156).

Quelques mots sur la manière d'effectuer ce calcul, et en général sur l'extraction de la racine carrée, des quantités qu'on ne peut évaluer qu'approximativement.

Théorème. Si on a un nombre quelconque de $2p + 2$ ou de $2p + 1$ chiffres, et qu'on supprime les p derniers chiffres, en les remplaçant par des zéros; la racine carrée de ce dernier nombre obtenue à moins d'une demi-unité près, sera celle du nombre donné à moins d'une unité près. On peut même si l'on veut, augmenter le dernier chiffre significatif d'une unité.

Démonstration. Soit N le nombre proposé, $N \pm f \cdot 10^p$ sera le nombre mutilé, f représentant une fraction plus petite que l'unité. Soit a la racine carrée de ce dernier nombre obtenue à moins d'une demi-unité près; alors on aura :

$$N \pm f \cdot 10^p = a^2 \pm f' a;$$

f' représentant aussi un nombre plus petit que l'unité. De là on déduit :

$$N - a^2 = \pm f' \cdot a \mp f \cdot 10^p.$$

Deux cas peuvent se présenter, ou bien le second membre est positif, ou il est négatif.

S'il est positif, on a $N - a^2 > 0$ ou $N > a^2$. D'ailleurs a est au moins égal à 10^p puisque la racine a $p + 1$ chiffres; de sorte qu'en supposant le cas le plus défavorable, où les fractions seraient égales à l'unité, $f' a + f \cdot 10^p$, est toujours

moindre que $2a + 1$. De l'inégalité $N - a^2 < 2a + 1$ on tire aisément $N < (a + 1)^2$. Le nombre donné étant compris entre a^2 et $(a + 1)^2$; sa racine est donc bien a , à moins d'une unité près.

Si le second membre est négatif; on a d'abord $N - a^2 < 0$, et par conséquent $N < a^2$. D'ailleurs, pour peu que a dépasse 10^p d'une unité seulement, ce second membre est moindre en valeur absolue que $2a - 1$, on a donc l'inégalité $N - a^2 > -2a + 1$, et par conséquent $N > a^2 - 2a + 1$, ou bien $N > (a - 1)^2$. N étant compris entre a^2 et $(a - 1)^2$; ce sera donc aussi sa racine à une unité près.

Il résulte de là que si on veut calculer une expression de la forme $\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ à un millièmè près par exemple, je calculerai $\sqrt{3}$ à un millièmè près, on ajoutera 2 à la racine obtenue, et l'on calculera la racine du résultat à un demi-millièmè près, ce qui donnera la racine demandée, à moins d'un millièmè près.

Si l'on avait un plus grand nombre de radicaux superposés, on pourra toujours continuer le calcul de la même manière, extraire les racines carrées successives à un demi-millièmè près; ce qui donnera en dernier résultat la racine demandée à un millièmè près.

Ce théorème pourrait servir dans la construction des tables de logarithmes en arithmétique: on veut insérer $2^m - 1$, moyens géométriques entre 1 et 10 par exemple, on aurait la raison à un dix-millièmè près, en extrayant m racines carrées successives de 10 à un demi-dix-millièmè près.

(Voir Guilmin, t. I, p. 487, et t. IV, p. 124, 205).

Note. Il serait à désirer qu'on eût une théorie analytique de toutes les approximations usitées en arithmétique; surtout pour celles de Fourier et de M. Guy. Tm.