

HENRI D'ANDRÉ

Démonstration du théorème 55 sur le binôme de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 121-122

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__121_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 55 (t. I, p. 521),
sur le binôme de Newton.

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,
élève de l'institution Laville.

—

THEOREME. L'exposant du binôme de Newton étant de la
forme $a^p - 1$ où a est un nombre premier et p un nombre

entier positif quelconque, aucun coefficient du binôme n'est divisible par a ; si l'exposant est a^p , tous les coefficients, les deux extrêmes exceptés, sont divisibles par a .

Démonstration. 1^{er} cas. Le coefficient du terme général d'un tel binôme est évidemment $\frac{(a^p-1)(a^p-2)\dots(a^p-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$, nombre essentiellement entier. a étant un nombre premier, il est nécessaire de considérer seulement les facteurs divisibles par a .

Soit ka^r ou $k < a$ un des facteurs du dénominateur ; il existe dans le numérateur un facteur correspondant $a^p - ka^r$; les deux facteurs sont donc divisibles par a^r et donnent des quotients non divisibles par a ; ôtant donc, haut et bas, les diviseurs a , on parvient au nombre entier $\frac{M}{N}$, où ni le dividende, ni le diviseur ne contiennent comme facteur le nombre premier a ; donc ce nombre entier n'est pas divisible par a . C. Q. F. D.

2^o cas. Le coefficient du terme général est :

$$\frac{a^p \cdot a^p - 1 \dots a^p - n + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \frac{a^p \cdot a^p - 1 \dots a^p - n}{a^p - n \cdot 1 \cdot 2 \dots n} = \frac{La^p}{a^p - n};$$

or on vient de démontrer que L ne contient pas le facteur a , et $a^p - n$ ne contient jamais autant de fois le diviseur a que a^p ; donc ce terme est divisible par a .