

TERQUEM

Théorème sur les racines imaginaires

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 115-116

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__115_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉOREME

sur les racines imaginaires.

THEOREME. $f(x)$ étant une fonction algébrique entière, si $fx(x - a)$ renferme $2k + 1$ variations de plus que $f(x)$, alors celle-ci a *au moins* $2k$ racines imaginaires.

Démonstration. Conservons la notation indiquée t. II, p. 250 ; ainsi pour le polynôme fx , T désigne le nombre de termes ; t , nombre de termes manquants ; ν , nombre total des variations ; ν' , nombre de variations répondant à des lacunes impaires, ν'' , nombre de variations répondant à des lacunes paires ; p , nombre total des permanences ; p' , nombre de permanences à lacunes impaires ; p'' , nombre de perma-

nences à lacunes paires ; O , nombre de racines positives ; N , nombre de racines négatives ; I , nombre de racines imaginaires ; z , nombre positif indéterminé. Les lettres grecques $T, \tau, \varphi, \varphi', \varphi'', \pi, \pi', \pi''$, désignent les quantités analogues pour le polynôme $fx(x-a)$.

$$\text{On a :} \quad \pi + \varphi + \tau = O + N + I + 1 ; \quad (1)$$

car le polynôme $fx(x-a)$ a une racine positive de plus que le polynôme fx ;

$$\varphi = \nu + 2k + 1, \text{ par hypothèse ; } \pi = \pi' + \pi'' ; O = \nu - z ;$$

$$N = \varphi' + \pi'' - z' ; \tau = \pi' + \varphi' + z''.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), il vient :

$$\pi' + \pi'' + \nu + 2k + 1 + \pi' + \varphi' + z'' = \nu - z + \varphi' + \pi'' - z' + I + 1 ;$$

$$\text{d'où} \quad I = 2\pi' + 2k + z'' + z' + z.$$

$$\text{Donc} \quad I \overset{=}{>} 2k + 2\pi'. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Observation. Ce théorème est de M. Sturm.

Correction importante. Dans l'article sur les imaginaires (t. IV, p. 236), au lieu de *trois termes consécutifs*, il faut lire *trois premiers termes consécutifs*. Cette correction m'avait été indiquée immédiatement par le savant auteur de l'article ; à mon grand regret, j'ai oublié de la mettre dans l'errata.