

J. HOUBIGANT

**Solution du problème proposé au
concours général de 1844, pour la classe
de mathématiques élémentaires**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 5-8

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SOLUTION

*du problème proposé au concours général de 1844, pour la
classe de mathématiques élémentaires,*

PAR J. HOUBIGANT (1^{er} prix),
élève du Collège royal de Louis-le-Grand (Division de *M. Vieille*).

—

Par un point *O* (*fig. 1*), donné sur un diamètre *AB*, on mène à la circonférence une sécante *OMM'* : démontrer qu'en joignant les points d'intersection *M* et *M'* avec le centre *C*, le produit

$$\operatorname{tang} \frac{\angle MCA}{2} \operatorname{tang} \frac{\angle M'CA}{2},$$

est constant pour toutes les sécantes menées du point *O* à la circonférence.

Si nous joignons *MB*, *M'B*, on sait que l'angle $\angle MBA = \frac{\angle MCA}{2}$,

et l'angle $\angle M'BA = \frac{\angle M'CA}{2}$. La question est ramenée à faire voir que le produit

$$\operatorname{tang} \angle MBA \operatorname{tang} \angle M'BA$$

est constant.

Joignons MA, M'A; dans les triangles rectangles BMA, BM'A, une proposition connue donne :

$$\text{tang MBA} = \frac{AM}{BM}, \quad \text{tang M'BA} = \frac{AM'}{BM'};$$

$$\text{donc} \quad \text{tang MBA tang M'BA} = \frac{AM \cdot AM'}{BM \cdot BM'}.$$

Les angles MAM', MBM' étant égaux, comme inscrits dans un même segment, les aires des triangles MAM', MBM', sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent ces angles; donc

$$\frac{AM \cdot AM'}{BM \cdot BM'} = \frac{AMM'}{BMM'}.$$

Or les mêmes triangles ont une base commune MM', leurs aires sont aussi entre elles comme leurs hauteurs AP, BP';

$$\text{donc} \quad \frac{AMM'}{BMM'} = \frac{AP}{BP'}, \text{ et par suite}$$

$$\frac{AM \cdot AM'}{BM \cdot BM'} = \frac{AP}{BP'}.$$

Enfin, ce rapport $\frac{AP}{BP'}$ peut se changer en celui-ci $\frac{OA}{OB}$, à cause de la similitude des triangles OAP, OBP'. On a donc :

$$(1) \quad \text{tang MBA tang M'BA} = \frac{OA}{OB},$$

rapport indépendant de la direction de la sécante, et qui, par conséquent, sera constant pour toute sécante menée du point O à la circonférence.

Discussion. L'égalité (1), vraie pour toute sécante, le sera encore à la limite, quand celle-ci deviendra tangente; alors les deux angles M'CA, MCA se confondent (fig. 2), et on a :

$$\text{tang}^2 \text{MBA} = \frac{OA}{OB};$$

il est facile de démontrer cette égalité directement.

Dans le triangle rectangle BMA on a .

$$\text{tang MBA} = \frac{AM}{BM},$$

done

$$\text{tang}^2 \text{MBA} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}^2}.$$

Ces carrés étant dans le rapport de leurs projections AI et IB sur l'hypoténuse , on aura :

$$\text{tang}^2 \text{MBA} = \frac{AI}{IB}.$$

Mais le triangle rectangle CMO donne :

$$OC : CM :: CM : CI ,$$

proportion qui , d'après une propriété connue , devient .

$$OC + CM : OC - CM :: CM + CI : CM - CI ,$$

ou bien

$$OC + CB : OC - CA :: CB + CI : CA - CI ,$$

ou enfin

$$OB : OA :: IB : AI ,$$

done

$$\text{tang}^2 \text{MBA} = \frac{AI}{IB} = \frac{OA}{OB}; \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque. Les points I et O , qui jouissent de la propriété que leurs distances respectives à deux autres points A et B sont dans le même rapport , ont reçu le nom de points conjugués harmoniques , et la ligne AB est dite divisée harmoniquement aux points I et O.

Un autre cas, limite, à examiner serait celui où la sécante se confond avec le diamètre ; mais alors l'un des angles devient nul , l'autre devient droit ; et le produit proposé prend la forme indéterminée $0 \times \infty$; on peut encore dire qu'il est égal à $\frac{OA}{OB}$.

Lorsque le point O au lieu d'être extérieur au cercle est intérieur (*fig. 3*), l'égalité (1) est encore vraie. La démonstration est absolument la même que celle que nous avons donnée pour le cas du point extérieur, seulement pour passer du rapport $\frac{AM \cdot AM'}{EM \cdot BM'}$ à celui des aires $\frac{AMM'}{BMM'}$, on ne s'appuie pas sur ce que les angles MAM' et MBM' sont égaux, mais sur ce qu'ils sont supplémentaires; dans ce cas le théorème qui a servi est encore vrai.

Dans le cas particulier où MM' est perpendiculaire au diamètre (*fig. 4*), les angles MBA , $M'BA$ sont égaux, alors

$$\text{tang } MBA \text{ tang } M'BA = \text{tang}^2 MBA = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}^2} = \frac{OA}{OB}.$$

Enfin si le point O se confond avec le centre C (*fig. 5*), le rapport $\frac{OA}{OB}$ devient l'unité; il faut que, pour toute direction de la sécante, le produit $\text{tang } MBA \text{ tang } M'BA = 1$.

En effet, comme $AM = BM'$, et $AM' = BM$, le rapport $\frac{AMM'}{BMM'}$ est évidemment l'unité, puisque le numérateur est égal au dénominateur.

Mais on peut dire plus simplement, que $M'BA$ étant le complément de MBA , $\text{tang } M'BA = \cot MBA$, donc

$$\text{tang } MBA \text{ tang } M'BA = \text{tang } MBA \cot MBA,$$

et on sait que

$$\text{tang } MBA \cot MBA = 1.$$