

TERQUEM

**Relations d'identité et équations
fondamentales relatives aux courbes
du second degré**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 526-530

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__526_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(V. p. 2 .)

LXI. Théorème de Carnot sur les segments.

THÉOREME. Soit une ligne de degré m et un polygone de n côtés tracés dans le même plan ; $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ désignant les sommets consécutifs du polygone. Considérant successivement $A_1, A_2, \dots, A_n$ comme des points fixes, les sécantes $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_nA_1$ formeront chacune m segments, et en tout mn segments ; relativement aux points fixes $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_1$, les sécantes $A_nA_{n-1}, A_{n-1}A_{n-2}, A_{n-2}A_{n-3}, \dots, A_2A_1$, forment mn autres segments ; le produit des mn premiers segments est égal au produit des mn seconds segments.

DEMONSTRATION. Par un point quelconque O pris dans le plan de la ligne, menons n parallèles aux côtés $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ du polygone. Ces parallèles formeront chacune m segments, comptés du point O ; désignons par (1) le produit des segments formés par la parallèle à A_1A_2 ou A_2A_1 ; par (2) le produit des segments formés par la parallèle à A_2A_3 ou A_3A_2 et ainsi de suite ; représentons de même par 1, 2 le produit des segments formés par la sécante A_1A_2 , comptés du point A_1 et par 2, 1 le produit des segments formés par la même sécante, mais comptés à partir de A_2 et ainsi des autres.

Le théorème de Newton donne (t. III, p. 510) :

$$\frac{1,2}{1,n} = \frac{(1)}{(n)} ; \quad \frac{2,3}{2,1} = \frac{(2)}{(1)} ; \quad \frac{3,4}{3,2} = \frac{(3)}{(2)} \dots \frac{n,1}{n,n-1} = \frac{(n)}{(n-1)} ;$$

multipliant ces équations ensemble , membre en membre , on obtient

$$1,2 \times 2,3 \times 3,4 \times \dots n,1 = 1,n \times 1,1 \times 3,2 \times \dots n,n-1 \text{ C. Q. F. D. }$$

Observation. Carnot énonce cette propriété seulement pour le triangle (*Géom. de position*, p. 289), mais il est évident que sa démonstration est applicable à un polygone quelconque ; et l'on voit que ce théorème général est un corollaire immédiat du théorème de Newton. Les segments doivent toujours être pris dans les sens *analytique* (t. III, p. 512, *observ.* 1).

LXVII. LEMME. Soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$; (1) l'équation d'une conique passant par quatre points dont les coordonnées sont connues ; substituant dans cette équation successivement les valeurs données des coordonnées , on obtient quatre équations du premier degré ; d'où l'on tire

$$\frac{B}{A} = Fp + q ; \quad \frac{C}{A} = Fp' + q' ; \quad \frac{D}{A} = Fp'' + q'' ; \quad \frac{E}{A} = Fp''' + q''' ;$$

$p, q, p', q' \dots$ sont des fonctions algébriques connues des coordonnées des quatre points ; ainsi l'équation (1) prend cette forme $\varphi(x, y) + F\psi(x, y) = 0$ (1), φ et ψ sont des fonctions du second degré à coefficients connus , soient encore deux autres coniques passant par les quatre mêmes points ; elles auront pour équation

$$\varphi(x, y) + F'\psi(x, y) = 0 ; \quad (2) \text{ et } \varphi(x, y) + F''\psi(x, y) = 0 ; \quad (3)$$

on peut toujours trouver deux nombres λ et λ' tels que $F'' = \lambda F + \lambda' F'$; $\lambda + \lambda' = 1$, donc (3) $= \lambda(1) + \lambda'(2) = 0$, ou bien (1) $+ \mu(2) = (3)$, telle est la relation qui existe entre les trois équations de trois coniques passant par les quatre mêmes points.

LXVIII. *Involution de Desargues.*

Soient

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 ;$$

$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0 ;$$

$$A''y^2 + B''xy + C''x^2 + D''y + E''x + F'' = 0 .$$

les équations de trois coniques passant par les quatre mêmes points.

On a donc, d'après le lemme précédent :

$$A'' = A + \mu A'; \quad B'' = B + \mu B'; \quad C'' = C + \mu C', \text{ etc.},$$

faisant $y = 0$ dans les trois équations, il vient :

$$\begin{aligned} Cx^2 + Ex + F &= C(x - r)(x - s); \\ C'x^2 + E'x + F' &= C'(x - r')(x - s'); \\ C''x^2 + E''x + F'' &= C''(x - r'')(x - s''); \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Cr'' + Er'' + F + \mu(C'r'^2 + E'r'' + F') &= 0, \\ Cs'' + Es'' + F + \mu(C's'^2 + E's'' + F') &= 0, \end{aligned}$$

éliminant μ et considérant que $Cr'' + Er'' + F = C(r'' - r)(r'' - s)$ et ainsi des autres trinômes, il vient

$$\frac{(r'' - r)(r'' - s)}{(s'' - r)(s'' - s)} = \frac{(r'' - r')(r'' - s')}{(s'' - r')(s'' - s')} \quad (1).$$

Soient A, A' les points d'intersection de la première conique avec l'axe des x ; B, B' de la seconde conique; C, C' ceux de la troisième conique avec le même axe. L'équation (1) interprétée géométriquement donne

$$CA \cdot CA' \cdot CB \cdot CB' = CB \cdot CB' \cdot CA \cdot CA' \quad (2);$$

désignons A et A' , B et B' , C et C' sous les noms de premier, deuxième et troisième groupe de *points conjugués*. Alors l'équation (2) peut s'énoncer ainsi : le produit des distances de C aux points du premier groupe, par le produit des distances de C' aux points du deuxième groupe, est égal au produit des distances de C aux points du deuxième groupe par le produit des distances de C' aux points du premier groupe. Il est évident qu'on peut les grouper dans tel ordre qu'on veut. on a donc encore ces deux équations :

$$\begin{aligned} BA \cdot BA' \cdot B'C \cdot B'C' &= BC \cdot BC' \cdot B'A \cdot B'A' \quad (2), \\ AB \cdot AB' \cdot A'C \cdot A'C' &= A'B \cdot A'B' \cdot AC \cdot AC' \quad (3); \end{aligned}$$

l'une de ces équations entre six points en enveloppe deux autres ; c'est ce qui a porté Desargues à dire que ces points sont *en involution*, et de là, le théorème suivant qui porte le nom de son inventeur :

Théorème de Desargues. Lorsque trois coniques passent par les quatre mêmes points, une sécante les coupe en six points qui sont *en involution*.

Observation I. Le théorème subsiste même lorsque des points deviennent imaginaires, et pourvu que l'on ait la relation :

$$(3) = (1) + \mu (2).$$

Observation II. En multipliant les équations (1), (2), (3), deux à deux, on en déduit ces quatre équations :

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot CB' \cdot BA' (4),$$

$$AB' \cdot BC \cdot C'A' = AC \cdot C'B' \cdot BA' (5),$$

$$AB \cdot B'C' \cdot CA' = AC' \cdot CB \cdot B'A' (6),$$

$$AB \cdot B'C \cdot C'A' = AC \cdot C'B \cdot B'A' (7),$$

qui expriment des relations entre trois segments.

Observation III. Si la sécante devient tangente à l'une des courbes, par exemple à la première conique : alors

$$CA = CA', C'A = C'A', AB = A'B, AB' = A'B';$$

on obtient les sept équations relatives à l'involution des cinq points A, B, B', C, C'; le point A est dit *double*.

Observation IV. Si C' est à l'infini, l'équation (1) se réduit à

$$CA \cdot CA' = CB \cdot CB'.$$

Alors le produit des distances du point C aux points du groupe A, A' est égal au produit des distances du même point C aux points du groupe B, B'.

Observation V. On a l'identité :

$$C(x-r)(x-s) + \mu C'(x-r')(x-s') = C''(x-r'')(x-s'');$$

donc

$$Cr_s + \mu C' r' s' = C'' r'' s'' = (C + \mu C') r'' s'';$$

si l'origine O est telle que l'on ait $rs = r's'$, on aura aussi $rs = r''s''$; c'est ce point O que M. Chasles désigne sous le nom de *point central* des trois groupes en *involution*, et lorsqu'il existe un tel point, les six points sont en involution. (*Histoire des méthodes*, p. 312.)

Observation VI. Si le point O est tel que l'on ait $r+s = r'+s'$, on aura aussi $r+s = r''+s''$.

Observation VII. Il est facile d'étendre le théorème d'involution à trois lignes quelconques, passant par m points et déterminées complètement par $m^2 + 1$ points. On a $\frac{m(m-1)}{2}$ systèmes d'involution de $3m$ points. Tm.