

Sur l'évaluation du volume d'un parallélipède à une base sphérique, d'après Euler

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 422-423

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__422_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉVALUATION

du volume d'un parallépipède à une base sphérique.

D'après Euler (*).

I. Soient O le centre d'une sphère; OA, OB, deux rayons à angle droit; M un point sur OA; N un point sur OB. Ayant construit le rectangle OMPN, on le prend pour base d'un parallépipède droit, qu'on prolonge jusqu'à la sphère. Il s'agit d'évaluer le volume de cette portion de la sphère.

II. Designons par OO', MM', PP', NN' les quatre arêtes du parallépipède.

Faisons OM = m; m et n sont plus petits que r :

$$ON = n;$$

$$OO' = r = \text{rayon de la sphère};$$

on aura :

$$MM'^2 = r^2 - m^2 = m'^2;$$

$$PP'^2 = r^2 - m^2 - n^2 = p'^2;$$

$$NN'^2 = r^2 - n^2 = n'^2;$$

$$\frac{m}{n'} = \sin u;$$

$$\frac{n}{m'} = \sin v;$$

$$\frac{mn}{m'n'} = \sin t,$$

V = le volume du parallépipède sphérique.

On a :

$$6V = 2mnp' + 2r^3[mu + nv - rt] + nn'^2u + mm'^2v.$$

(*) N. Comm. Petrop., tome XIV, p. 80, an. 1769.

III. Lorsque le point P est sur la sphère, alors $m^2 + n^2 = r^2$:
 $m = n'$; $n = m'$; et l'on a :

$$6V = \pi r^2 (m + n - r) + \frac{\pi}{2} mn (m + n);$$

ce qui atteint le maximum lorsque $m = n$; et alors

$$m^2 = \frac{r^2}{2} = n^2, \quad 6V = \frac{\pi r^3}{4} [5\sqrt{2} - 4].$$
