

Note sur les racines commensurables fractionnaires

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 397-399

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__397_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

sur les racines commensurables fractionnaires

—

Théorème. $\frac{\alpha}{\beta}$ étant une quantité commensurable irréductible, racine de l'équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_m = 0,$$

(*) Nous admettons encore ici que $\pm B = \int \pm dc$, c'est-à-dire que les courbes $Q = C$ ne peuvent être tangentes à mG . il en résulterait en effet que $\theta = \varphi$ pourrait être droit, ce qui est impossible

$A, A_1, A_2, \dots, A_m$ sont des coefficients entiers, on aura les conditions suivantes :

$$A = \dot{\beta}; \quad A_m = \dot{\sigma}; \quad A\alpha + A = \dot{\beta}; \quad A\alpha^2 + A_1\alpha\beta + A_2 = \dot{\beta}^2; \\ A\alpha^3 + A_1\alpha^2\beta + A_2\alpha + A_3 = \dot{\beta}^3 \dots$$

et enfin :

$$A\alpha^m + A_1\alpha^{m-1}\beta + A_2\alpha^{m-2}\beta^2 + \dots A_{m-1}\alpha\beta^{m-1} + A_m\beta^m = \dot{\beta}^m = \dot{0}.$$

Démonstration. La dernière équation est évidente, puisqu'elle exprime que $\frac{\alpha}{\beta}$ est racine. Tous les termes, le premier excepté, sont divisibles par β ; donc $A\alpha^m$ est aussi divisible par β ; mais α^m est premier avec β ; donc A est divisible par β ; ainsi $A = \dot{\beta}$. Le même genre de raisonnement fait voir que $A_m = \dot{\sigma}$. La somme des deux premiers termes doit être divisible par β ; divisant cette somme par α^{m-1} , le quotient $A\alpha + A$ est donc divisible par β . La somme des trois premiers termes doit être divisible par β^2 ; divisant cette somme par α^{m-2} , le quotient $A\alpha^2 + A_1\alpha\beta + A_2$ sera divisible par β^2 , et ainsi de suite. C. Q. F. D.

Corollaire I. $\frac{A}{\beta}$ et $\frac{A_m}{\alpha}$ doivent être des nombres entiers; et de même,

$$\frac{A\alpha}{\beta} + A_1, \quad \frac{A\alpha^2}{\beta^2} + A_1\frac{\alpha}{\beta} + A_2; \quad \frac{A\alpha^3}{\beta^3} + A_1\frac{\alpha^2}{\beta^2} + A_2\frac{\alpha}{\beta} + A_3; \dots$$

La loi de déduction de ces quantités est évidente.

On a donc ces diverses conditions pour reconnaître si $\frac{\alpha}{\beta}$ est racine; et si une seule manque, alors on est sûr que la quantité essayée n'est pas racine.

Corollaire II. Si $\beta = 1$, ces critères deviennent illusoires; alors, on cherche des critères, en considérant α comme diviseur, et on tombe sur la méthode connue (voir t. II, p. 523). On sait d'ailleurs qu'on peut toujours ramener la recherche des racines commensurables fractionnaires à celle des racines commensurables entières.

Corollaire III. Le théorème subsiste lorsque α et β sont des expressions littérales n'ayant point de diviseur commun.

Observation. Le théorème peut se démontrer directement à l'aide du théorème de M. Gauss sur le produit de deux polynômes (t. III, p. 47) ; car le polynôme donné étant entier et divisible par $x - \frac{\alpha}{\beta}$ doit donner un quotient à coefficients entiers ; mais ces divers coefficients sont :

$$\frac{A\alpha}{\beta} + A_1, \quad \frac{A\alpha^2}{\beta^2} + A_1\frac{\alpha}{\beta} + A_2, \quad \dots$$

donc, etc.

Tm.