

**Les trois racines de l'équation du troisième degré $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ déduites des formules de Cardan, lorsque $a_0 = 0$.
D'après M. Bonniakowski**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4 (1845), p. 382-384

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4_382_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES TROIS RACINES

*de l'équation du troisième degré $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$
dédites des formules de Cardan, lorsque $a_0 = 0$.*

(D'après M. Bonniakowski (Crelle, t. III, p. 347).

—

Soit l'équation $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$.

Faisons $x = y - \frac{1}{3} \frac{a_1}{a_0}$, il vient $y^3 + py + q = 0$,

ou

$$p = \frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{3} \frac{a_1^2}{a_0^2}; \quad q = \frac{2}{27} \frac{a_1^3}{a_0^3} - \frac{1}{3} \frac{a_1 a_2}{a_0^2} + \frac{a_3}{a_0},$$

et les trois valeurs de x sont :

$$a_0x = -\frac{1}{3} a_1 - \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \sqrt[3]{A - \sqrt{B}};$$

$$a_0x = -\frac{1}{3} a_1 - \alpha \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \alpha^2 \sqrt[3]{A - \sqrt{B}};$$

$$a_0x = -\frac{1}{3} a_1 - \alpha^2 \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \alpha \sqrt[3]{A - \sqrt{B}};$$

α est une racine cubique imaginaire de l'unité.

$$A = \frac{1}{27} a_1^3 - \frac{1}{6} a_1 a_2 a_0 + \frac{1}{2} a_3 a_0^2;$$

$$B = A^2 + \left(\frac{a_2 a_0}{3} - \frac{1}{9} a_1^2 \right)^3.$$

Faisant $a_0 = 0$, il vient : $A = \frac{1}{27} a_1^3$, $B = 0$;

d'où $x = \infty; \quad x = \frac{0}{0}; \quad x = \frac{0}{0}.$

Pour trouver la véritable valeur du symbole $\frac{0}{0}$, il faut, d'après la règle du calcul différentiel, connaître la valeur de $\frac{dA}{da_0}$ et de $\frac{dB}{da_0}$.

Or $\frac{dA}{da_0} = -\frac{1}{6} a_1 a_2 + a_3 a_0$, et faisant $a_0 = 0$, on a :

$$\frac{dA}{da_0} = -\frac{1}{6} a_1 a_2.$$

On a : $\frac{dB}{da_0} = 2A \frac{dA_0}{da_0} + \left(a_2 a_0 - \frac{1}{9} a_1^2 \right) a_2$;

donc $\frac{dB}{da_0} = 0$.

Faisant $z = \frac{\frac{dB}{da_0}}{\sqrt{B}}$, pour $a_0 = 0$, on a $z = \frac{0}{0}$;

d'où

$$\sqrt{B} \cdot \frac{dz}{da_0} + \frac{1}{2} z \cdot B^{\frac{1}{2}} \frac{dB}{da_0} = \frac{d^2 B}{da_0^2};$$

d'où

$$z^2 = \frac{2d^2 B}{d^2 a_0} - 2\sqrt{B} \cdot \frac{dz}{da_0};$$

faisant $a_0 = 0$, on trouve :

$$z^2 = 4 \left[\frac{2}{27} a_3 a_1^3 - \frac{1}{2.27} a_1^2 a_2^2 \right];$$

différentiant la seconde valeur de x d'après a_0 , il vient :

$$\begin{aligned} a_0 \frac{dx}{da_0} + x &= -\frac{1}{3} z \left[A + \sqrt{B} \right]^{-\frac{2}{3}} \left[\frac{dA}{da_0} + \frac{dB}{da_0} \cdot B^{-\frac{1}{2}} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{3} z^2 \left[\frac{dA}{da_0} - \frac{dB}{da_0} \cdot B^{-\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Faisant $a_0 = 0$, et remplaçant les diverses quantités par les valeurs trouvées ci-dessus, on a, toute déduction faite :

$$x = -\frac{1}{2} \frac{a_2}{a_1} + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1}};$$

la seconde valeur s'obtient en changeant le signe du radical ;
or ces deux valeurs sont les racines de l'équation

$$a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

C. Q. F. T.

Tm.
