

TERQUEM

Théorèmes et problèmes. Sur les foyers et centres des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 322-328

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__322_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES ET PROBLÈMES

Sur les foyers et centres des coniques ()*.

(V. p. 304.

XIX. Problème. Connaissant trois points et le foyer d'une conique à centre, trouver une équation de cette courbe, et les coordonnées du centre.

Solution Soient A, B, C, F les trois points et le foyer

(*) A la fin de cet article, on donnera les solutions géométriques de Newton

donnés ; prenons ce foyer pour origine et les axes rectangulaires ; soient y', x' ; y'', x'' ; y''', x''' les coordonnées des points A, B, C ; l'équation cherchée est

$$(y^2 + x^2)(k^2 + k'^2 - ml) = (ky + k'x - l)^2, \quad (\text{v. t. II, p. 427}),$$

à laquelle on peut donner la forme $y^2 + x^2 = (My + Nx + P)^2$; faisons $y'^2 + x'^2 = r'^2$, $y''^2 + x''^2 = r''^2$, $y'''^2 + x'''^2 = r'''^2$; on obtient ces trois équations

$$\begin{aligned} My' + Nx' + P &= r', \\ My'' + Nx'' + P &= r'', \\ My''' + Nx''' + P &= r''', \end{aligned}$$

nous supprimons le double signe de r qu'il faut toujours supposer. Les formules de Cramer donneront

$$P = \frac{r' [y''x''' - x''y'''] + r'' [y'''x' - x'''y'] + r''' [y'x'' - x'y']}{Q},$$

$$N = \frac{r' [y''' - y''] + r'' [y' - y'''] + r''' [y'' - y']}{Q},$$

$$M = \frac{r' [x'' - x'''] + r'' [x''' - x'] + r''' [x' - x'']}{Q},$$

$$Q = y'x'' - y'x''' - y''x' + y''x''' + y'''x' - y'''x''.$$

Observation. 1° $y'x'' - x'y''$, est le double de l'aire du triangle FAB, etc. ; Q est le double de l'aire du triangle ABC de sorte qu'on a $P = \frac{r.FBC + r'.FAC + r'''.FAB}{ABC}$, quantité

facile à construire, ainsi que M et N.

Observation. 2° L'équation de la courbe est

$$y^2(1 - M^2) - 2MNxy + x^2(1 - N^2) - 2PMx - 2PNy - P^2 = 0. \quad (1)$$

Les fonctions élémentaires de la courbe sont (t. I, p. 489)

$$\begin{aligned} m &= 4(M^2 + N^2 - 1), \\ k &= -4PN, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k' &= -4PM, \\ l &= 4P^2 = l', \\ n &= 0, \\ L &= 4P^3. \end{aligned}$$

Ainsi pour que la courbe soit une ellipse, il faut que l'on ait $M < 1 < N$; pour l'hyperbole $M^2 + N^2 > 1$; pour la parabole $M^2 + N^2 = 1$.

Observation. 3° Passons aux coordonnées polaires, soit

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos \varphi', \quad y' = r' \sin \varphi', \quad x'' = r'' \cos \varphi'', \quad y'' = r'' \sin \varphi'', \\ x''' &= r''' \cos \varphi''', \quad y''' = r''' \sin \varphi''', \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} PQ &= r' r'' r''' [\sin(\varphi'' - \varphi''') + \sin(\varphi''' - \varphi') + \sin(\varphi' - \varphi'')], \\ Q &= r' r'' \sin(\varphi' - \varphi'') + r' r''' \sin(\varphi'' - \varphi') + r'' r''' \sin(\varphi' - \varphi'''), \\ MQ &= r' \cos \varphi' [r''' - r''] + r'' \cos \varphi'' [r' - r'''] + r''' \cos \varphi''' [r'' - r'], \\ NQ &= r' \sin \varphi' [r' - r''] + r'' \sin \varphi'' [r''' - r'] + r''' \sin \varphi''' [r' - r'']. \end{aligned}$$

Si l'on prend la droite r' pour axe des x , alors $\varphi' = 0$; et les valeurs de M , N , P , Q sont entièrement déterminées par les côtés et les diagonales, les angles, et l'aire du quadrilatère $FABC$.

Observation. 4° L'ordonnée à l'origine est $\frac{-P}{M \pm 1}$, l'équation de la directrice est $My + Nx + P = 0$, la distance de l'extrémité de l'ordonnée à l'origine, à la directrice est

$$\frac{-P}{(M \pm 1) \sqrt{M^2 + N^2}}, \text{ donc } \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{c}{a}; c \text{ est l'excentricité et } a \text{ le } \frac{1}{2} \text{ axe focal; la distance du foyer à la directrice}$$

est $\frac{1}{2} \text{ axe focal; la distance du foyer à la directrice}$

$$\text{est } \frac{P}{\sqrt{M^2 + N^2}}, \text{ donc } \frac{P}{\sqrt{M^2 + N^2}} = \frac{a'}{c}; \text{ de là } P = a;$$

$$c = P \sqrt{M^2 + N^2}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - M^2 - N^2}, \quad b = \frac{1}{2} \text{ petit axe.}$$

(Voir Roguet, t. I, p. 137).

$$a = \frac{\sin(\varphi'' - \varphi''') + \sin(\varphi''' - \varphi') + \sin(\varphi' - \varphi'')}{\frac{\sin \varphi'' - \varphi'''}{r'} + \frac{\sin(\varphi''' - \varphi')}{r''} + \frac{\sin(\varphi' - \varphi'')}{r'''}}$$

Observation. 5° Ce problème est très-important en Astronomie. Connaissant trois observations d'une planète, rapportée au plan de son orbite, on peut déterminer les éléments géométriques de l'orbite. (Voir Lenthéric, *Ann. de Gergonne*, t. XVII, p. 366)

XX. *Problème.* Connaissant quatre points d'une conique, trouver le lieu des foyers.

Solution. Adoptons les mêmes données et les mêmes notations qu'au problème I (p. 260); et supposons qu'il s'agisse de l'équation d'une conique passant par trois points, et dont le centre a pour coordonnées t, u ; l'équation (1) (p. 261), sera celle de la courbe.

Calculons les éléments de cette courbe; on aura

$$\begin{aligned} m &= (2u - q)(2t - p)(pq - 2pu - 2qt), \\ k &= mt, \quad k' = mu, \quad l = q^2 t^2 (2t - p)^2, \quad l' = p^2 u^2 (2u - q)^2, \\ n &= pqtu(2t - p)(2u - q), \\ L &= tu(2t - p)(2u - q)(pq - 2pu - 2qt)(pq - pu - qt), \\ N &= t(2t - p) + u(2u - q) - (2t - p)(2u - q)\cos\gamma; \end{aligned}$$

désignant par α et β les coordonnées du foyer, on aura

$$\begin{aligned} &2(A - C)(\alpha - t)(\beta - u) + (\alpha - t)^2 [B - 2C\cos\gamma] + \\ &+ (\beta - u)^2 (2A\cos\gamma - B) = 0 \quad (\text{t. II, p. 429}), \quad \} \quad (1) \\ m^2 [(\beta - u)^2 \cos\gamma + (\alpha - t)(\beta - u)] &= 2L(2C\cos\gamma - B), \quad (2) \\ A = t(2t - p), \quad B = -(2u - q)(2t - p), \quad C &= u(2u - q). \end{aligned}$$

Mais la conique devant passer par un quatrième point, ayant pour coordonné x', y' , on a encore entre u et t , cette équation

$$\begin{aligned} &t(2t - p)y'^2 - (2u - q)(2t - p)x'y' + u(2u - q)x'^2 - \\ &- qt(2t - p)y' - pu(2u - q)x' = 0. \quad \} \quad (3) \end{aligned}$$

L'équation (1) est du quatrième degré, l'équation (2) est du huitième degré, et l'équation (3) du deuxième degré en u et t ; éliminant u et t entre ces équations, on parvient à une équation entre α et β , qui peut monter au soixante-quatrième degré et ce qui n'a rien de surprenant; car chaque conique ayant quatre foyers analytiques (t. II, p. 429), l'équation finale peut renfermer des facteurs de degré pair réel, correspondant aux foyers imaginaires; circonstance qui rend toujours compliquées les solutions analytiques, ou il s'agit de déterminer des foyers; tandis que le centre, point unique, donne des solutions simples; il en est de même pour le foyer dans la parabole, ainsi que nous le verrons plus loin.

XXI. Problème. Connaissant deux points d'une conique, une tangente et un foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Soient x', y' ; x'', y'' , les coordonnées rectangulaires des deux points, et le foyer à l'origine; et soit $dy+ex+f=0$, l'équation de la tangente, même notation que pour le problème (XIX): on a ces trois équations

$$My' + Nx' + P = r',$$

$$My'' + Nx'' + P = r'',$$

$$P^2(d^2+e^2) - 2P(dM+eN) + f^2(M^2+N^2-1) = 0 \quad (\text{t. II, p. 108}).$$

Éliminant M et N entre ces trois équations, on arrive à une équation du second degré en P ; il y a donc telles données qui peuvent rendre le problème impossible.

XXII. Problème. Connaissant trois points d'une conique, et une tangente, trouver le lieu des foyers

Solution. Même notation qu'au problème XX, et soit de plus $dy+ex+f=0$ l'équation de la tangente, nous avons encore les mêmes équations (1) et (2); mais l'équation (3) sera remplacée par celle ci :

$$l'd^2 - 2den + le^2 + mf^2 + 2f(dk' + ek) = 0 \quad (\text{t. II, p. 108}).$$

Cette équation est du quatrième degré en u et t ; donc l'élimination des deux variables u est entre les trois variables peut donner une équation entre α et β du 128° degré.

XXIII. Problème. Connaissant un point d'une conique, une tangente avec le point de contact et le foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Soit x', y' les coordonnées rectangulaires du point; $d(y-y'')+e(x-x'')=0$, l'équation de la tangente y'' et x'' sont les coordonnées du point de contact; l'origine est au foyer; on a les mêmes équations que pour le problème XXI; dans la dernière équation, il faut remplacer f par $-dy''-ex''$.

XXIV. Problème. Connaissant deux points d'une conique, une tangente avec le point de contact, trouver le lieu des foyers.

Solution. La même que pour le problème XXII, il faut remplacer f par $-dy''-ex''$.

XXV. Problème. Connaissant un point d'une conique, deux tangentes et le foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Soient $dy+ex+f=0$, $d'y+e'x+f'=0$, les équations des tangentes; axes rectangulaires; origine au foyer; on a pour déterminer M, N, P les trois équations

$$My'+Nx'+P=r', \quad (1)$$

$$P^2(d^2+e^2)-2Pf'(dM+eN)+f^2(M^2+N^2-1)=0, \quad (2)$$

$$P^2(d'^2+e'^2)-2Pf'(d'M+e'N)+f'^2(M^2+N^2-1)=0. \quad (3)$$

On parvient par élimination à une équation en P du quatrième degré.

XXVI. Problème. Connaissant deux points d'une conique et deux tangentes, trouver le lieu des foyers.

Solution. On obtient la solution au moyen de l'équation (2) de la page 263.

XXVII. Problème. Étant données trois tangentes et le foyer, trouver une équation de cette conique.

Solution. Axes rectangulaires, origine au foyer ;

$$dy+ex+f=0, \quad d'y+e'x+f'=0, \quad d''x+e''y+f''=0;$$

équations des trois tangentes, aux équations (2) et (3) du problème XXV, il faut joindre celle-ci

$$P^2(d''+e'')-2Pf''(d''M-e''N)+f''^2(M^2+N^2+1)=0,$$

et on parvient à une équation finale en P du huitième degré.

(*La suite prochainement.*)