

FINCK

Sur la décomposition des fractions rationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4 (1845), p. 295-298

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4_295_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

PAR M. FINCK,
professeur à Strasbourg.

Cette question faisant partie du programme d'admission à l'École Polytechnique, il ne sera pas hors de propos d'indiquer la méthode que j'emploie à mon cours d'analyse infinitésimale.

I. Soit $\frac{fx}{Fx}$ la fraction, fx étant de degré moindre que Fx , et premier avec lui : soit $x - a$ un facteur simple de $Fx = (x - a)\varphi x$. Je pose $x = a + z$, et j'ai :

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{f(a+z)}{z\varphi(a+z)} = \frac{fa + zf'a + \frac{z^2}{2}f''a + \dots}{z \left[\varphi a + z\varphi'a + \frac{z^2}{2}\varphi''a + \dots \right]}.$$

Divisant $fa + zf'a + \dots$ par $\varphi a + z\varphi'a + \dots$ les termes restant dans l'ordre où ils se trouvent, on a pour premier terme du quotient $\frac{fa}{\varphi a}$ et un reste qui n'est autre chose que $\frac{\varphi a \cdot f(a+z) - fa \cdot \varphi(a+z)}{\varphi a}$, ayant pour facteur z : donc

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{fa}{\varphi a \cdot z} + \frac{\varphi a f(a+z) - fa \varphi(a+z)}{z \varphi a \cdot \varphi(a+z)}.$$

On prouve comme à l'ordinaire que $\varphi a = F'a$; donc nous avons une première fraction partielle $\frac{fa}{F'a} \cdot \frac{1}{z} = \frac{fa}{F'a} \cdot \frac{1}{x-a}$. Le reste, encore comme à l'ordinaire, en tant qu'il s'agit de facteurs simples de Fx .

II. Passons aux facteurs multiples, et soit $Fx = (x-a)^n \cdot \varphi x$, je pose encore $x = a + z$, et j'ai :

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{fa + zf'a + \dots}{z^n [\varphi a + z\varphi'a + \dots]}.$$

Or on n'a qu'à diviser encore $fa + zf'a + \dots$, par $\varphi a + z\varphi'a + \dots$ et s'arrêter au terme en z^{n-1} , au quotient, ce quotient sera de la forme $A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + \dots + A_{n-1} z^{n-1}$. Quant au reste, si Fx est de degré m , fx de degré $m-2$, dans notre division le diviseur $\varphi(a+z)$ est du degré $m-n$, le dividende du degré $m-2$, le quotient du degré $n-1$, le reste sera donc au plus du degré $m-1$; soit Rz^n . Ce reste qui renferme évidemment z^n pour facteur, de sorte que R est du degré $m-n-1$; on aura .

$$\begin{aligned} \frac{fx}{Fx} &= \frac{A_1 + A_2 z + \dots + A_{n-1} z^{n-1}}{z^n} + \frac{R}{\varphi(a+z)} \\ &= \frac{A_1}{z^n} + \frac{A_2}{z^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{z} + \frac{R}{\varphi(a+z)}, \end{aligned}$$

et de la fraction proposée, nous avons extrait les n fractions partielles $\frac{A_1}{(x-a)^n}, \dots, \frac{A_{n-1}}{x-a}$, plus la fraction $\frac{R}{\varphi x}$, dont

le numérateur est du degré $m - n - 1$, et le dénominateur est du degré $m - n$; elle est donc de même nature que la proposée.

III. Pour montrer que cette méthode est éminemment pratique, je prends :

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{3x^4 - 11x^3 + 14x^2 - 15x + 5}{(x-1)^3 (x+1)^2 (x-2)},$$

je pose $x = 1 + z$, et je trouve :

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{-4 - 8z - z^2 + z^3 + 3z^4}{z^3 (z+2)^2 (z-1)}.$$

Je divise le numérateur par $(z+2)^2 (z-1) = -4 + 3z^2 + z^3$, voici l'opération, poussée jusqu'au terme en z^3 au quotient :

$$\begin{array}{rcl} & -4 - 8z - z^2 + z^3 + 3z^4 & \left| \begin{array}{l} -4 + 3z^2 + z^3 \\ 1 + 2z + z^2 \end{array} \right. \\ 1^{\text{er}} \text{ reste} & -8z - 4z^2 + 3z^4 & \\ 2^{\text{e}} \text{ reste} & -4z^2 - 6z^3 + z^4 & \\ 3^{\text{e}} \text{ reste} & -6z^3 - 2z^4 - z^5 & \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{fx}{Fx} &= \frac{1 + 2z + z^2}{z^3} - \frac{6z^3 + 2z^4 + z^5}{z^3 (z+2)^2 (z-1)} \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z} - \frac{6 + 2z + z^2}{(z+2)^2 (z-1)}. \end{aligned}$$

Actuellement au lieu de revenir à $\frac{fx}{Fx}$, pour en extraire les autres fractions, il est plus simple d'opérer sur $\frac{6 + 2z + z^2}{(z+2)^2 (z-1)} = \frac{f_1 z}{\varphi_1 z}$, j'y pose $z+2=y$, et j'ai $\frac{f_1 (y-2)}{\varphi_1 (y-2)} = \frac{6 - 2y + y^2}{y^2 (y-3)}$; je divise le numérateur par $-3 + y$,

$$\begin{array}{rcl} & 6 - 2y + y^2 & \left| \begin{array}{l} -3 + y \\ 0y + y^2 \end{array} \right. \\ 1^{\text{er}} \text{ reste} & 0y + y^2 & \\ 2^{\text{e}} \text{ reste} & y^2 & \end{array}$$

donc

$$\frac{f_1}{y_1} = -\frac{2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2(y-3)} = -\frac{2}{y^2} + \frac{4}{y-3},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{fx}{Fx} &= \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{2}{y^2} - \frac{1}{y-3} \\ &= \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-2}. \end{aligned}$$

On pourrait, de la division seule, déduire une formule générale pour le numérateur de $(x-a)^{n-\alpha}$; mais dans chaque cas, la division est préférable.

Note. L'intégration des fractions algébriques rationnelles par la décomposition en fractions partielles est due à Jean Bernoulli (Voy. *Op. omnia*, t. I, p. 393), mais la méthode généralement adoptée pour obtenir les coefficients à l'aide de dérivations est d'Euler. Le procédé par *la division* a été proposé par divers, entre autres par un anonyme, dans le journal de Gergonne, t. X, p. 255, et par le professeur Dirksen, journal de Crelle, t. I, p. 53; on possède aussi des procédés combinatoires. (Voir Cauchy, cours d'Analyse, ch. XI, p. 365).

Tm.