

DUTERME

Note sur le calcul des approximations

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 4
(1845), p. 124-126

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1845_1_4__124_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1845, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur le calcul des approximations.

PAR M. DUTERME,

élève du collège Rollin (classe de M. O. BONNET .

--

PROBLÈME. *Etant donnés deux nombres a et b entre lesquels on veut insérer m moyens géométriques, on demande avec quelle approximation, il faut prendre la raison $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$, pour que tous ces moyens soient obtenus à moins de δ .*

Solution. Appelons q la valeur cherchée de la raison, que nous supposerons approchée à moins de ε , et soit $q + \alpha$ la valeur exacte de cette raison, de telle sorte que

$$(q + \alpha)^{m+1} = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \alpha < \varepsilon.$$

Les valeurs approchées des moyens seront

$$aq, \quad aq^2, \quad aq^3, \dots aq^n, \dots aq^m,$$

et les valeurs exactes

$$a(q+\alpha), \quad a(q+\alpha)^2, \quad a(q+\alpha)^3, \dots a(q+\alpha)^n, \dots a(q+\alpha)^m,$$

de manière que les erreurs commises auront pour valeurs respectives

$$ax, \quad a[(q+\alpha)^2 - q^2], \dots a[(q+\alpha)^3 - q^3], \dots a[(q+\alpha)^m - q^m].$$

Évaluons ces différences.

Posons en général :

$$(q+\alpha)^n - q^n = A;$$

en multipliant par q et ajoutant ensuite $\alpha(q+\alpha)^n$ aux deux membres, il viendra :

$$(q+\alpha)^{n+1} - q^{n+1} = Aq + \alpha(q+\alpha)^n.$$

Ce qui nous montre que connaissant la différence de deux mêmes puissances de $q+\alpha$ et de q , pour avoir la différence entre les deux puissances suivantes, il suffit de multiplier la première différence par q , et d'ajouter ensuite le produit de α par la puissance de $q+\alpha$, qui entrait dans la première différence.

De cette remarque nous déduisons successivement :

$$\begin{aligned} q+\alpha - q &= \alpha, \\ (q+\alpha)^2 - q^2 &= \alpha q + \alpha(q+\alpha), \\ (q+\alpha)^3 - q^3 &= \alpha q^2 + \alpha q(q+\alpha) + \alpha(q+\alpha)^2, \\ &\dots \dots \dots \\ (q+\alpha)^n - q^n &= \alpha q^{n-1} + \alpha q^{n-2}(q+\alpha) + \dots + \alpha(q+\alpha)^{n-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ (q+\alpha)^m - q^m &= \alpha q^{m-1} + \alpha q^{m-2}(q+\alpha) + \dots + \alpha(q+\alpha)^{m-1}. \end{aligned}$$

Ainsi la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée du moyen de rang n est

$$ax[\alpha q^{n-1} + \alpha q^{n-2}(q+\alpha) + \dots + \alpha(q+\alpha)^{n-1}]$$

Comme l'on peut toujours supposer q et $q + \alpha$ plus grands que 1 ou $b > a$ (*), on voit que cette différence va en augmentant avec n ; elle est donc la plus grande possible pour $n = m$; il suffit donc pour résoudre la question, de poser :

$$a\alpha [q^{m-1} + q^{m-2}(q + \alpha) + \dots + (q + \alpha)^{m-1}] < \delta,$$

ou

$$ma\alpha (q + \alpha)^{m-1} < \delta \quad \text{ou} \quad ma\alpha (q + \alpha)^{m+1} = mb\alpha < mb\varepsilon < \delta,$$

d'où

$$\varepsilon < \frac{\delta}{mb}. \qquad \text{C.Q.F.T.}$$