

E. CATALAN

Note sur l'analyse indéterminée du premier degré

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 97-101

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__97_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

SUR

L'ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

PAR E. CATALAN,

Répétiteur à l'Ecole polytechnique

J'ai donné, autrefois dans *le Géomètre* (*), et plus récemment dans le *Cours de Mathématiques* de M. Blum, un procédé fort simple servant à trouver une solution de l'équation du premier degré à deux inconnues. D'après la note de M. Chevillard, insérée dans le tome II de ce journal, il paraît que le procédé dont je parle est encore peu connu. Je me décide donc à le publier de nouveau. On me pardonnera d'avoir cherché à propager cet algorithme, si je déclare, comme je l'ai déjà fait il y a treize ans, qu'il avait été indiqué depuis longtemps par M. Pilatte, dans les *Annales de Gergonne* (t. II, p. 230 en 1812).

1 Soit, pour plus de régularité dans la notation, l'équation

$$ay + bx = A, \quad (1)$$

nous supposons a, b, A entiers, a et b premiers entre eux, et $b < a$.

On déduit, de cette équation, $x = \frac{A - ay}{b}$, ou, en appelant Q, q, B, c les quotients et les restes que fournissent A et a divisés par b ,

$$x = Q - qy + \frac{B - cy}{b}.$$

(*) P. 177. Ce recueil hebdomadaire publié en 1836, par M. Guillard, ancien professeur au Collège Louis-le-Grand, a cessé de paraître, pour défaut de timbre, la même année.

Le tome premier s'arrête à la page 224.

Tm

Nous voulons que x et y soient entiers : nous devons donc attribuer à y une valeur qui rende entière la quantité $\frac{B - cy}{b}$. Autrement dit, la résolution de l'équation (1) est ramenée à la résolution, en nombres entiers, de

$$\frac{B - cy}{b} = z,$$

ou de

$$bz + cy = B, \quad (2)$$

laquelle est plus simple que la proposée, car le coefficient c , reste de la division de a par b , est moindre que b .

Resolvons l'équation (2) par rapport à l'inconnue qui a le plus petit coefficient; nous aurons

$$y = \frac{B - bz}{c} = Q' - q'z + \frac{C - dz}{c},$$

en représentant par Q' et q' les quotients entiers de B et b par c et par C , d les restes correspondants. Répétant le raisonnement ci-dessus, nous verrons que z doit rendre entière la quantité $\frac{C - dz}{c}$, ou que l'équation (2) se réduit à celle-ci

$$cz + dz = C, \quad (3)$$

dans laquelle les coefficients c et d sont respectivement moindres que b et c . A son tour, cette dernière équation entraîne une plus simple qu'elle, et ainsi de suite.

2. Observons actuellement que les coefficients c , d , e , . . . sont les restes successifs que fournirait l'opération du plus grand commun diviseur effectuée sur a et b . Car c est le reste de la division de a par b , de même, d est le reste de la division de b par c ; etc. Par hypothèse, a et b sont premiers entre eux, donc l'opération dont il s'agit conduira nécessairement à un dernier reste égal à l'unité. Ainsi la résolution

de l'équation (1) se réduira , en dernier lieu , à celle d'une équation de cette forme

$$u + g\nu = G ,$$

c'est-à-dire dans laquelle le coefficient de l'une des deux inconnues sera l'unité. Or si l'on attribue à ν une valeur entière quelconque , il en résultera pour u une valeur entière ; et , en remontant successivement , on finira par déterminer les valeurs entières correspondantes de x et de y .

3. On peut donner au calcul une marche régulière qui le simplifie considérablement.

Supposons

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{A-ay}{b}, \quad y = \frac{B-bz}{c}, \quad z = \frac{C-cr}{d}, \quad r = \frac{D-ds}{e}, \\ s &= \frac{E-et}{f}, \quad t = \frac{F-fu}{g}, \quad u = \frac{G-g\nu}{h}, \quad \dots \end{aligned} \right\} (4)$$

Dans ces expressions , les quantités $c, d, e, f, \dots$ sont , ainsi que nous l'avons déjà dit , les restes successifs fournis par la recherche du plus grand commun diviseur entre a et b : admettons , pour fixer les idées , que le dernier de ces restes , égal à l'unité , soit h .

Relativement aux quantités $B, C, D, \dots$ la loi de composition est fort simple : B est le reste de la division de A par b ; C est le reste de la division de B par c ; etc.

Le calcul de ces divers coefficients s'effectue comme l'indique le tableau ci-après

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} a & b & c & d & e & f & g & 1 \\ \hline A & B & C & D & E & F & G & 0 \end{array}$$

La ligne supérieure se forme comme dans l'opération du plus grand commun diviseur. Pour former la seconde ligne , on écrit A sous a , puis l'on divise ce premier terme par b ; on obtient ainsi un reste B , que l'on écrit au-dessous de b ; etc. En général : *chaque terme de la ligne inférieure est le reste de*

la division du terme placé à gauche, par le terme placé au-dessus. Il est visible que le dernier terme, correspondant au diviseur 1, est 0.

Ces deux lignes étant calculées, on détermine les inconnues u, t, s, r, z, y, x en fonction de v , à l'aide des équations (4); c'est-à-dire que :

Chaque inconnue s'obtient en retranchant d'un terme de la seconde ligne, le produit du nombre écrit au-dessus par l'inconnue qu'on vient de déterminer, et divisant le reste par le terme écrit à la droite de ce nombre.

4. Comme application des règles précédentes, prenons l'équation

$$89x + 162y = 209.$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 162 & 89 & 73 & 16 & 9 & 7 & 2 & 1 \\ \hline 209 & 31 & 31 & 15 & 6 & 6 & 0 & 0 \end{array}$$

D'abord, 162 divisé par 89 donne pour reste 73; 89 divisé par 73 donne pour reste 16; etc.

Ensuite, 209 divisé par 89 donne 31 pour reste; 31 divisé par 73 donne encore 31; etc.

Les deux lignes étant formées, nous aurons, en prenant $v = 0$:

$$u = \frac{0 - 2 \times 0}{1} = 0, \quad t = \frac{6 - 7 \times 0}{2} = 3, \quad s = \frac{6 - 9 \times 3}{7} = -3,$$

$$r = \frac{15 + 16 \times 3}{9} = 7, \quad z = \frac{31 - 73 \times 7}{16} = -30,$$

$$y = \frac{31 + 89 \times 30}{73} = 37, \quad x = \frac{209 - 162 \times 37}{89} = -65.$$

L'équation est donc satisfaite par $x = -65$, $y = 37$; d'où, en général,

$$x = -65 + 162v, \quad y = 37 - 89v.$$

Soit encore l'équation

$$29x - 47y = 112.$$

Elle donne

$$\frac{-47}{112} \mid \frac{29}{25} \mid \frac{-18}{7} \mid \frac{11}{7} \mid \frac{-7}{0} \mid \frac{4}{0} \mid \frac{-3}{0} \mid \frac{1}{0}$$

Puis,

$$\frac{0+3 \times 0}{1}=0, \quad \frac{0-4 \times 0}{-3}=0, \quad \frac{0+7 \times 0}{4}=0, \quad \frac{7-11 \times 0}{-7}=-1,$$

$$\frac{7-18 \times 1}{11}=-1, \quad \frac{25+29 \times 1}{-18}=-3, \quad \frac{112-47 \times 3}{29}=-1 ;$$

donc

$$x=-1+490, \quad y=-3+290.$$

On peut observer, d'après ce dernier exemple, que si la ligne inférieure est terminée par une suite de zéros, il est bon de commencer le calcul des inconnues à partir du terme qui précède le dernier zéro.