

E. LIONNET

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 93-94

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__93_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN.

SOLUTION DE M. E. LIONNET,

Professeur de mathématiques au Collège royal de Louis-le-Grand.

Trouver le volume d'un segment sphérique à une base en fonction du rayon r de la base du segment et de sa hauteur h , connaissant le volume de la sphère et sachant que la fonction demandée est entière par rapport aux quantités r et h .

Soit ACB le demi-cercle générateur de la sphère, BD la hauteur du segment, CD le rayon de sa base et v son volume ; on aura

$$(1) \quad v = Ah^3 + Bh^2r + Chr^2 + Dr^3,$$

A, B, C, D désignant des nombres constants qu'il s'agit de déterminer.

La droite CD étant une perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence sur le diamètre AB , on a la proportion

$$AD:CD::CD:BD,$$

d'où l'on tire $AD = \frac{\overline{CD}}{BD} r^3 h^{-1}$; mais la ligne AD est la hauteur d'un autre segment de même base que le premier ; donc, pour exprimer le volume ν' de ce segment en fonction de r et h , il suffit de remplacer h par $r^3 h^{-1}$ dans le second membre de l'égalité (1), ce qui donne

$$\nu' = Ah^{-3}r^6 + Bh^{-2}r^5 + Ch^{-1}r^4 + Dr^3.$$

Pour exprimer le volume V de la sphère en fonction des mêmes quantités r et h , nous observons qu'on a $V = \frac{1}{6} \pi \overline{AB}^3$ et $AB = BD + AD = h + r^3 h^{-1}$, d'où l'on déduit

$$V = \frac{\pi}{6} (h^3 + 3hr^2 + 3h^{-1}r^4 + h^{-3}r^6) ;$$

mais la sphère entière est égale à la somme des deux segments ; donc

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{6} (h^3 + 3hr^2 + 3h^{-1}r^4 + h^{-3}r^6) = \\ & = Ah^3 + Bh^2r + Chr^2 + 2Dr^3 + Ch^{-1}r^4 + Bh^{-2}r^5 + Ah^{-3}r^6. \end{aligned}$$

Cette égalité ayant lieu pour des valeurs de r aussi petites qu'on voudra, lorsqu'on attribue à h des valeurs comprises entre AB et $\frac{1}{2} AB$, les coefficients des même puissances de r sont égaux dans les deux membres ; donc

$$A = \frac{\pi}{6}, \quad B = 0, \quad C = \frac{\pi}{2}, \quad D = 0,$$

et, par suite,

$$\nu = \frac{1}{2} \pi r^2 h + \frac{1}{6} \pi h^3.$$
