

E. CATALAN

Note sur la toroïde

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 553-555

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__553_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA TOROÏDE

PAR E. CATALAN,

Brepetiteur à l'École polytechnique.

Pour obtenir l'équation de cette courbe, il faut, ainsi que
l'a fait voir M. Cauchy, éliminer θ entre les deux équations

$$\frac{a^2x^2}{(g+a^2)^2} + \frac{b^2y^2}{(g+b^2)^2} = 1, \quad \frac{b^2x^2}{(g+a^2)^2} + \frac{a^2y^2}{(g+b^2)^2} = k^2.$$

(*Nouvelles Annales*, t. III, p. 455).

Cette élimination se fait assez simplement de la manière suivante.

Chassant les dénominateurs, on obtient d'abord :

$$a^2 (0 + b^2)^2 x^2 + b^2 (0 + a^2)^2 y^2 = (0 + a^2)^2 (0 + b^2)^2, \quad (1)$$

$$0^2 (0 + b^2)^2 x^2 + 0^2 (0 + a^2)^2 y^2 = k^2 (0 + a^2)^2 (0 + b^2)^2. \quad (2)$$

Multipliant l'équation (1) par 0^2 , l'équation (2) par a^2 ; retranchant membre à membre, et supprimant le facteur $(0 + a^2)^2$, j'obtiens :

$$(a^2 - b^2) 0^2 y^2 = (0 + b^2)^2 (a^2 k^2 - 0^2). \quad (3)$$

On aurait de même :

$$(a^2 - b^2) 0^2 x^2 = (0 + a^2)^2 (0^2 - b^2 k^2). \quad (4)$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (3) et (4), et si l'on supprime le facteur $a^2 - b^2$, commun aux deux membres de l'équation résultante, on obtient :

$$0^2 (x^2 + y^2) = 0^2 (a^2 + b^2 + 20) + k^2 (0^2 - a^2 b^2). \quad (5)$$

Multiplions l'équation (3) par a^2 , l'équation (4) par b^2 ajoutons, et supprimons le facteur $(a^2 - b^2) 0$; il viendra :

$$0 (a^2 y^2 + b^2 x^2) = 0 (a^2 b^2 - 0^2) + k^2 0 (a^2 + b^2) + 2a^2 b^2 k^2. \quad (6)$$

Ces deux dernières équations étant ordonnées par rapport à 0, deviennent :

$$20^2 - 0^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2) - a^2 b^2 k^2 = 0, \quad (5')$$

$$0^3 + 0 (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a^2 b^2) - 2a^2 b^2 k^2 = 0. \quad (6')$$

J'élimine tour à tour, entre ces deux dernières équations, le terme en 0^3 et le terme indépendant; j'obtiens ainsi

$$A 0^2 + 2B 0 - 3C = 0, \quad (7) \quad 30^2 - 2A 0 - B = 0; \quad (8)$$

en posant, pour abréger,

$$A = x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2, \quad B = a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a^2 b^2, \\ C = a^2 b^2 k^2.$$

Les équations (7) et (8), traitées comme les deux précédentes, donnent

$$2(A^2 + 3B)0 + (AB - 9C) = 0, \quad (9)$$

$$(AB - 9C)0 + 2(B^2 + 3AC) = 0. \quad (10)$$

Enfin, l'élimination de 0 entre ces deux dernières équations, conduit à

$$(AB - 9C)^2 = 4(A^2 + 3B)(B^2 + 3AC).$$

L'équation de la toroïde est donc

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a'b'^2)^2 \\ & + 4a^2 b^2 k^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)^3 - 27a^4 b^4 k^4 \\ & + 18a^3 b^2 k^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2) (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a'b'^2) \\ & + 4(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a'b'^2)^3 = 0. \end{aligned}$$