

A. PEYRONNY

Aire de l'ellipsoïde allongé

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 466-471

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__466_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AIRE DE L'ELLIPSOÏDE ALLONGÉ

(*V. t. I*, p. 480),

PAR M. A. PEYRONNY,

élève interne du collège de Saint-Louis (classe de M. Vincent)

Considérons la branche AM'B (*fig. 64*) d'une ellipse ayant pour grand axe la ligne OA = a et pour petit axe la ligne OB = b ; cette branche, en tournant autour de l'axe OA, engendrera la moitié de la surface d'un ellipsoïde de révolution; je représente par S cette surface, qu'il s'agit de déterminer.

Supposons que nous ayons divisé l'arc AD du cercle principal circonscrit en un très-grand nombre l de parties égales, dont je représente la valeur commune par k ; k aura pour valeur $\frac{\pi a}{2l}$ et deviendra, quand l sera infini, l'élément du cercle, en un certain point M.

Soit K' l'élément de l'ellipse qui correspond au point M', ayant même abscisse OP; menons par les points M et M' deux tangentes qui viendront couper l'axe OA en un même point C, et représentons par m la tangente de l'angle MCO = MOD = α , nous aurons

$$k' = k \sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2} m^2 + 1}{m^2 + 1}} = \frac{\pi}{2} a \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2} m^2 + 1}{m^2 + 1}} \quad (\nu. \text{ p. } 233).$$

La demi-surface de l'ellipsoïde est égale à la somme des surfaces élémentaires engendrées par les éléments de la branche

AM'B. Soit s la surface correspondante à l'élément k' , il viendra

$$s = 2\pi \cdot \text{M}'\text{P} \cdot k' = \pi^2 a \text{M}'\text{P} \cdot \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2} m^2 + 1}{m^2 + 1}} =$$

$$= \pi^2 ab \cdot \frac{1}{l} \cos \alpha \sqrt{\frac{\frac{b^2}{a^2} m^2 + 1}{m^2 + 1}} = \pi^2 \frac{ab}{l} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} m^2 + 1},$$

car on a

$$\text{M}'\text{P} = \text{MP} \cdot \frac{b}{a} = a \cos \alpha \cdot \frac{b}{a} = b \cos \alpha.$$

Représentons par p et q le sinus et le cosinus de l'angle α , posons $\frac{b^2}{a^2} = r^2 = \cos^2 \theta$, ce qui est possible, puisque b est $< a$, et désignons par Σs la somme de toutes les surfaces élémentaires, nous aurons

$$\frac{1}{2} S = \Sigma s = \Sigma \pi^2 \cdot ab \frac{q}{l} (p^2 r^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} = \pi^2 al \Sigma \frac{q}{l} \dots$$

$$\left\{ pr + \frac{\frac{1}{2}}{1} p \frac{p^{2(\frac{1}{2}-1)}}{r} q^2 + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2} p \frac{p^{2(\frac{1}{2}-3)}}{r^3} q^4 + \dots \right.$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2 \dots n} p \frac{p^{2(\frac{1}{2}-n)}}{r^{n-1}} q^{2n} =$$

$$= \pi^2 ab \Sigma \cdot \frac{1}{l} \left\{ pqr + q \frac{\tan \theta}{\sin \theta} \left[\frac{\frac{1}{2}}{1} p^2 \left(\frac{1}{2}-1\right) q^2 + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2} p^{2(\frac{1}{2}-2)} \frac{q^4}{r^2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1.2 \dots n} p^{2(\frac{1}{2}+1)} \frac{q^{2n}}{r^{n-1}} + \dots \right] \right\} + \text{etc.} \left. \right\}$$

Cette expression devient, en posant $t = \tan \theta$ et remarquant

$$\text{que } r^2 = \frac{1}{1+t^2}$$

$$T_{2n+1} + T_{2n-1} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n - 1 \right)}{1.2 \dots n} \cdot \Sigma \frac{q}{l}$$

$$\left[p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)} q^{2n} + \left(\frac{1}{2}-n\right) p^{2\left(\frac{1}{2}-n-1\right)} q^{2(n+1)} + \frac{\left(\frac{1}{2}-n\right) \left(\frac{1}{2}-n-1\right)}{2} p^{2\left(\frac{1}{2}-n-2\right)} q^{2(n+2)} + \frac{\left(\frac{1}{2}-n\right) \left(\frac{1}{2}-n-1\right) \left(\frac{1}{2}-n-2\right)}{1.2.3} \dots \right],$$

et remarquant que la quantité entre parenthèse revient à

$$p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)} q^{2n} + (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}-n} q^{2n} - p^{2\left(\frac{1}{2}-n\right)} q^{2n},$$

ou à q^{2n} , en vertu de la relation $p^2 + q^2 = 1$,

$$T_{2n+1} + T_{2n-1} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{1.2 \dots n} \Sigma \frac{q^{2n+1}}{l},$$

$\Sigma \frac{q^{2n+1}}{l}$ représente la somme des $(2n+1)^{ème}$ puissances de tous

les cosinus des angles compris entre 0 et 90°, divisée par le nombre des angles, et l'on sait qu'elle a pour valeur

$$\frac{1.2 \dots n}{1.3 \dots (2n+1)} \cdot \frac{2^{n+1}}{\pi};$$

il viendra alors, en simplifiant,

$$T_{2n+1} + T_{2n-1} = \frac{\pm 2}{(2n-1)(2n+1)} \times \frac{1}{\pi},$$

d'où

$$T_{2n+1} = \frac{\pm 2}{(2n-1)(2n+1)} \times \frac{1}{\pi} - T_{2n-1},$$

le signe + correspondant au cas où n est impair et le signe - à celui où n est pair.

Revenons maintenant à la valeur de $\frac{1}{2}S$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum \frac{pq}{l} &= \sum \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{l} = \frac{1}{2} \sum \frac{\sin 2\alpha}{l} = \frac{1}{\pi}, \\ \sum \frac{q}{l} \left[\frac{1}{1} p^{2(\frac{1}{2}-1)} q^2 + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-1 \right)}{1.2} p^{2(\frac{1}{2}-3)} q^4 + \dots \text{ etc.} \right] &= \\ &= \sum \frac{q}{l} \left[(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} - p \right] = \sum \frac{q-pq}{l} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}, \end{aligned}$$

il viendra alors

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \pi^2 ab \left\{ \frac{r}{\pi} + \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{1}{\pi} \cdot t + \left(\frac{2}{1.3} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot t^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(-\frac{2}{3.5} - \frac{2}{1.3} + 1 \right) \frac{1}{\pi} t^5 + \dots \right] \right\} \\ &= \pi ab \left\{ r + \frac{1}{\sin \theta} \left[t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + \dots \pm \frac{1}{2n-1} t^{2n-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\pm \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \mp \frac{1}{(2n-1)} \right) t^{2n+1} + \dots \right] \right\} \\ &= \pi ab \left\{ r + \frac{1}{\sin \theta} \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \pm \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \mp \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots \right) \right\}, \end{aligned}$$

r est le cosinus de l'angle θ , t la tangente; alors la série qui est multipliée par $\frac{1}{\sin \theta}$ représente le développement de l'arc θ en fonction de sa tangente; nous aurons ainsi définitivement

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \pi ab \left\{ \cos \theta + \frac{\theta}{\sin \theta} \right\}, \\ \text{ou} \quad S &= 2\pi ab \left\{ \cos \theta + \frac{\theta}{\sin \theta} \right\}. \end{aligned}$$

Note. Cette belle méthode, qu'il serait facile d'abrégé, est analogue à celle que Wallis employait, avant l'invention du calcul intégral, pour la quadrature des aires; le calcul suivant fait ressortir l'immense avantage des nouveaux calculs.

1° *Aire de l'ellipsoïde allongé.* On a pour expression intégrale de cette aire

$$2\pi \frac{b}{a^2} \int dx \sqrt{a^4 - c^2 x^2} = \pi \frac{b}{a^2} \left(x \sqrt{a^4 - c^2 x^2} + \frac{a^4}{c} \arctan \frac{cx}{\sqrt{a^4 - c^2 x^2}} \right),$$

faisant $x=a$ et doublant le résultat, on a pour la surface totale $2\pi ab \left(\cos \theta + \frac{0}{\sin \theta} \right)$; lorsque $a=b$, alors $\theta=0$ et $\frac{\theta}{\sin \theta} = 1$; l'aire devient $4\pi a^2$, qui est celle de la sphère.

2° *Aire de l'ellipsoïde aplati.*

$$2\pi \frac{a}{b^3} \int dy \sqrt{b^4 + c^2 y^2} = \pi \frac{a}{b^3} \left[C + y \sqrt{b^4 + c^2 y^2} + \frac{b^4}{c} \log (cy + \sqrt{b^4 + c^2 y^2}) \right].$$

Si on détermine la constante pour que l'intégrale soit nulle pour $y=0$, on obtient $C = -\frac{b^4}{c} \log b^2$, faisant ensuite $y=b$ et doublant le résultat, on obtient pour l'aire totale de l'ellipsoïde aplati

$$2\pi ab \left[\sec \theta + \cot \theta \log \tan 45^\circ + \frac{1}{2} \theta \right].$$

(*V. t. I, p. 524*); faisant $a=b$, on a

$$\theta = 0, \quad \sec \theta = 1, \quad \frac{\log \tan 45^\circ + \frac{1}{2} \theta}{\tan \theta} = \frac{0}{0}.$$

La dérivée du numérateur est $\frac{1}{\sin (90^\circ + \theta)}$ et celle du dénominateur est $\frac{1}{\cos^2 \theta}$; donc ce rapport est égal à l'unité. Ainsi l'aire devient $4\pi a^2$, qui est encore celle de la sphère. (*V. Moigno, t. II, p. 160.*) Tm.