

TARNIER

Note sur l'équation aux carrés des différences

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 410-412

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__410_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

sur l'équation aux carrés des différences.

PAR M. TARNIER,
professeur.

1° Trouver la relation entre les coefficients d'une équation, pour qu'elle soit l'équation aux carrés des différences d'une équation du 3^{me} degré de la forme $x^3 + qx + r = 0$.

D'après la relation $n = \frac{m(m-1)}{1.2}$, on voit que $n = 3$;
l'équation cherchée étant du 3^{me} degré, est de la forme

$$\zeta^3 + F\zeta^2 + G\zeta + H = 0.$$

Or le calcul donne pour équation aux carrés des différences de $x^3 + qx + r^2 = 0$,

$$\zeta^3 + 6q\zeta^2 + 9q^2\zeta + (4q^3 + 27r^2) = 0,$$

et l'on voit en identifiant que

$$\frac{F}{2} = 3q, \quad G = 9q^2 = \frac{F^2}{4}.$$

Cette condition $G = \frac{F^2}{4}$ est nécessaire et suffisante. En effet,

pour retrouver l'équation primitive, on prendra $q = \frac{F}{6}$,

et on pourra choisir r , de façon qu'on ait $4q^3 + 27r^2 = H$; r pourra être imaginaire.

Cette condition ne peut pas s'énoncer ainsi : « la somme des trois premiers coefficients est un carré » ; mais bien : « les trois premiers termes doivent être les trois termes du carré d'un binôme, en supposant le coefficient du premier terme égal à 1 » ; et encore mieux : « le carré de la moitié du coefficient du deuxième terme est égal au produit des coefficients du premier et du troisième terme. »

2° Nous allons exposer une deuxième méthode qui, ne nécessitant pas l'équation aux carrés des différences, s'applique à toute équation du troisième degré, et indique la méthode à suivre pour un degré supérieur au troisième.

Soient $\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}$ les racines de l'équation ; celles de

$$\zeta^3 + F\zeta^2 + G\zeta + H = 0,$$

sont $\begin{smallmatrix} (a-b)^2 \\ (b-c)^2 \\ (a-c)^2 \end{smallmatrix}$; et l'on voit que les trois quantités $\begin{smallmatrix} a-b \\ b-c \\ a-c \end{smallmatrix}$ sont

telles, que la somme des deux premières donne la troisième ;

donc, les trois racines sont $\begin{smallmatrix} P^2 \\ q^2 \\ (p+q)^2 \end{smallmatrix}$ et l'on a

$$(1) \quad -F = p^2 + q^2 + (p+q)^2$$

$$(2) \quad G = p^2q^2 + (p^2 + q^2)(p+q)^2,$$

$$(3) \quad -H = p^2q^2(p+q)^2;$$

il suffit d'éliminer $\frac{P}{q}$, pour avoir la relation entre $\frac{F}{G}$. Or,

on a :

$$-F = 2(p^2 + q^2 + pq), \quad G = (p^2 + q^2)^2 + 2pq(p^2 + q^2) + p^2q^2 = (p^2 + q^2 + pq)^2 = \frac{F^2}{4}.$$

Cette condition $G = \frac{F^2}{4}$ est suffisante, car en prenant $\frac{P}{q}$, de

manière à satisfaire à $\begin{smallmatrix} (1) \\ (3) \end{smallmatrix}$, G sera toujours égal à $\frac{F^2}{4}$.