

HUET

Questions d'examen. Surfaces et volumes engendrés par les polygones réguliers, lorsqu'ils tournent autour d'une perpendiculaire au diamètre du cercle circonscrit menée par le sommet auquel aboutit ce diamètre

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3 (1844), p. 361-365

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3_361_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS D'EXAMEN.

*Surfaces et volumes engendrés par les polygones réguliers ,
lorsqu'ils tournent autour d'une perpendiculaire au dia-
mètre du cercle circonscrit menée par le sommet auquel
aboutit ce diamètre.*

PAR M. HUET,

ancien professeur de mathématiques spéciales à l'École de Sorrèze ,
régent de mathématiques spéciales au collège de Pamiers.

—

Nous adopterons dans la résolution de ces questions , les
mêmes notations que celles que nous avons employées
p. 353, t. II ; seulement , pour varier les difficultés , nous

chercherons directement les expressions des volumes et des surfaces que nous nous proposons de trouver en fonction du rayon R du cercle circonscrit. La marche que nous allons suivre est d'ailleurs la même.

SURFACES ENGENDRÉES.

1° Triangle (fig. 46).

$$\begin{aligned}\text{Surf. T} &= \text{surf. CB} + 2 \text{ surf. AB} = 2\pi \text{BF.CB} + 2\pi \text{BF.AB} = \\ &= 4\pi \cdot \text{AB.BF} = 3\text{AB} \cdot 2\pi \cdot \frac{2\text{BF}}{3} = 3\text{AB} \cdot 2\pi \text{AO}; \quad (1)\end{aligned}$$

$$\text{or} \quad \text{AB} = R\sqrt{3}, \quad \text{AO} = R;$$

$$\text{donc} \quad \text{surf. T} = 3 \cdot R\sqrt{3} \cdot 2\pi R = 6\pi R^2 \sqrt{3}.$$

2° Carré (fig. 47).

$$\begin{aligned}\text{Surf. C} &= 2(\text{surf. AB} + \text{surf. CB}) = 2\pi \{ \text{BE.AB} + \text{CB}(\text{CA} + \text{BE}) \} = \\ &= 2\pi \text{AB} (2\text{BE} + \text{CA}) = 4\text{AB} \cdot 2\pi \text{OA}; \quad (2)\end{aligned}$$

$$\text{or } \text{AB} = R\sqrt{2}, \text{ et } \text{OA} = R; \text{ donc surf. C} = 8\pi R^2 \sqrt{2}.$$

3° Pentagone (fig. 48).

$$\begin{aligned}\text{Surf. P} &= 2 \text{ surf. AB} + 2 \text{ surf. CB} + \text{surf. EC} = 2\pi \text{BH.AB} + \\ &+ 2\pi \text{BC} (\text{CG} + \text{BH}) + 2\pi \text{CG.EC} = 4\pi \text{AB} (\text{BH} + \text{CG});\end{aligned}$$

or on a

$$\begin{aligned}\text{AB} &= \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad \text{BF} = \text{D} = \frac{\text{AB}}{2} (1 + \sqrt{5}) = \\ &= \frac{R}{4} (1 + \sqrt{5}) \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{R}{4} \sqrt{40 + 8\sqrt{5}} = \frac{R}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}};\end{aligned}$$

$$\text{AH} = \frac{\text{D}}{2} = \frac{R}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$\begin{aligned}\text{BH} &= \sqrt{\text{AB}^2 - \text{AH}^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4} (10 - 2\sqrt{5}) - \frac{R^2}{16} (10 + 2\sqrt{5})} = \\ &= \frac{R}{4} \sqrt{30 - 10\sqrt{5}} = \frac{R}{4} (5 - \sqrt{5});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CG=AD &= \sqrt{D^2-DC^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4}(10+2\sqrt{5}) - \frac{R^2}{16}(10-2\sqrt{5})} = \\ &= \frac{R}{4} \sqrt{30+10\sqrt{5}} = \frac{R}{4} (5+\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{surf. P} &= 4\pi \cdot R \sqrt{10-2\sqrt{5}} \left\{ \frac{R}{4}(5-\sqrt{5}) + \frac{R}{4}(5+\sqrt{5}) \right\} = \\ &= 5\pi R^2 \sqrt{10-2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

4° *Hexagone* (fig. 49).

$$\begin{aligned} \text{Surf. H} &= 2 (\text{surf. AB} + \text{surf. BC} + \text{surf. CD}) = \\ &= 2\pi \{ BG \cdot AB + \overline{CG}^2 - \overline{BG}^2 + DC (DA + CG) \} = \\ &= 2\pi \{ BG \cdot AB + (CG + BG) (CG - BG) + DC (DA + CG) \} = \\ &= 2\pi AB (BG + 2DA + CG) = 2\pi AB \cdot 3DA = 6AB \cdot 2\pi OA; \quad (3) \\ \text{or} \quad OA &= AB = R, \quad \text{donc} \quad \text{surf. H} = 12\pi R^2. \end{aligned}$$

5° *Octogone* (fig. 50).

$$\begin{aligned} \text{Surf. O} &= 2 (\text{surf. AB} + \text{surf. BC} + \text{surf. CD} + \text{surf. ED}) = \\ &= 2\pi \{ AB \cdot BF + BC(BF + CG) + DC(CG + DF) + ED(DF + AE) \} = \\ &= 2\pi AB(2BF + 2CG + 2DF + AE) = 2\pi AB \cdot 4AE = 8AB \cdot 2\pi AO; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad AB = R \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad OA = R;$$

$$\text{donc} \quad \text{surf. O} = 16\pi R^2 \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

6° *Décagone* (fig. 51).

$$\begin{aligned} \text{Surf. D} &= 2(\text{surf. AB} + \text{surf. BC} + \text{surf. CD} + \text{surf. ED} + \text{surf. EF}) = \\ &= 2\pi \left\{ AB \cdot BG + BC(BG + CK) + \overline{DK}^2 - \overline{CK}^2 + ED(DK + EG) + \right. \\ &\quad \left. + EF(EG + FA) \right\} = \\ &= 2\pi \left\{ AB \cdot BG + BC(BG + CK) + (DK + CK)(DK - CK) + \right. \\ &\quad \left. + ED(DK + EG) + EF(EG + FA) \right\} = \\ &= 2\pi AB (2BG + CK + DK + 2EG + 2FA) = \\ &= 2\pi AB \{ 2(BG + EG) + 3FA \} = 2\pi AB \cdot 5FA = 10AB \cdot 2\pi AO; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad AB = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1), \quad OA = R;$$

$$\text{donc} \quad \text{surf. D} = 10\pi R^2 (\sqrt{5} - 1).$$

7° *Dodécagone* (fig. 52).

$$\begin{aligned} \text{Surf. D} &= 2 \left(\text{surf. AB} + \text{surf. BC} + \text{surf. DC} + \text{surf. DE} + \right. \\ &\quad \left. + \text{surf. FE} + \text{surf. GF} \right) = \\ &= 2\pi \left\{ AB \cdot BH + BC (BH + CK) + CD (CK + DL) + \right. \\ &\quad \left. + ED (DL + EK) + FE (EK + FH) + GF (FH + AG) \right\} = \\ &= 2\pi AB (2BH + 2CK + 2DL + 2EK + 2FH + AG) = \\ &= 2\pi AB \{ 2 (BH + FH) + 2 (CK + EK) + 2DL + GA \} = \\ &= 2\pi \cdot AB \cdot 6GA = 12AB \cdot 2\pi OA; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{or} \quad AB = R \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{R}{2} (\sqrt{6} - \sqrt{2}), \quad OA = R;$$

$$\text{donc} \quad \text{surf. D} = 12\pi R^2 (\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Les expressions (1), (2), (3), (4), (5), (6), n'étant autre chose que la traduction du théorème de Guldin, on en conclut que ce théorème conduit immédiatement aux mêmes expressions que celles que nous fournit la géométrie.

Quant à la surface engendrée par le pentagone, on a, en appliquant le théorème de Guldin: surf. P = 5AB. 2πR; or

$$AB = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}; \text{ donc surf. P} = 5\pi R^2 \sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

résultat identique à celui que nous avons trouvé.

On pourrait chercher, d'une manière analogue, les expressions de ces surfaces en fonction du côté c , ou en fonction de l'apothème r . La géométrie et le théorème de Guldin pourraient encore servir mutuellement de vérification. En cherchant, par exemple, ces surfaces en fonction de c , on trouve :

$$1^\circ \text{ Triangle} \quad \text{surf. T} = 2\pi c^2 \sqrt{3};$$

$$2^\circ \text{ Carré} \quad \text{surf. C} = 4\pi c^2 \sqrt{2};$$

3° Pentagone surf. P = $\pi c^2 \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$;

4° Hexagone surf. H = $12\pi c^2$;

5° Octogone surf. O = $8\pi c^2 \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$;

6° Décagone surf. D = $18\pi c^2 (1 + \sqrt{5})$,

7° Dodécagone surf. D = $12\pi c^2 (\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

(La suite prochainement.)

