

A. PEYRONNY

Limites du périmètre d'une ellipse, et rectification d'une cycloïde

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 232-234

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3_232_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LIMITES DU PÉRIMÈTRE D'UNE ELLIPSE,

ET RECTIFICATION D'UNE CYCLOÏDE.

PAR M. A. PEYRONNY,

Élève interne du collège de Saint-Louis (classe de M. Vincent).

THEORÈME.

Le périmètre d'une ellipse dont les demi-axes principaux sont a et b est toujours compris entre $\pi(a+b)$ et $\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

Soient $OA=a$ (*fig. 22*) et $OB=b$ les demi-axes principaux de l'ellipse. Considérons deux points P et P' ayant même abscisse et situés, l'un sur le cercle circonscrit, et l'autre sur l'ellipse; menons ensuite deux tangentes qui

viendront couper l'axe OA en un même point C. Si α , α' représentent les angles PCO, P'CO, K et K' l'élément du cercle au point P et celui de l'ellipse au point P', on aura

$$\frac{K}{K'} = \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha'}}$$

ou, en posant $\tan^2 \alpha = m^2$, et remarquant que $\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha'} = \frac{a}{b} \dots$

$$K' = K \sqrt{\frac{a^2 + b^2 m^2}{a^2 (m^2 + 1)}}$$

Ainsi, si m , m' , $m'' \dots$ représentent les tangentes de tous les angles compris entre 0° et 90° , n leur nombre et p le périmètre de l'ellipse, dont celui de la branche AB n'est que la quatrième partie, on pourra poser, en vertu de la relation

$$nK = \frac{\pi}{2} a$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{4} = \frac{\pi}{2n} a \left\{ \sqrt{\frac{a^2 + b^2 m^2}{a^2 (m^2 + 1)}} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2 m'^2}{a^2 (m'^2 + 1)}} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{a^2 + b^2 m''^2}{a^2 (m''^2 + 1)}} + \dots \text{etc., en nombre } n \right\}. \end{aligned}$$

Comme à une valeur m de la tangente en correspond une autre $\frac{1}{m}$, les deux termes $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 m^2}{a^2 (m^2 + 1)}}$ et $\sqrt{\frac{b^2 + a^2 m^2}{a^2 (m^2 + 1)}}$ se trouveront dans la suite qui constitue le coefficient de $\frac{\pi}{2} a$, et la relation précédente deviendra alors, après la suppression du facteur a ,

$$\begin{aligned} \frac{p}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} n} \left\{ \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 m^2}{m^2 + 1}} + \sqrt{\frac{b^2 + a^2 m^2}{m^2 + 1}} \right) + \right. \\ \left. + \dots \text{etc., en nombre } \frac{n}{2} \right\}. \end{aligned}$$

La quantité $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 m^2}{m^2 + 1}} + \sqrt{\frac{b^2 + a^2 m^2}{m^2 + 1}}$ ramenée à la forme $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ devient

$$\sqrt{a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}\right)^2}}.$$

Pour $m = 0$, cette fonction atteint son minimum, qui est $(a + b)$, et son maximum $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$ répond à l'hypothèse $m = 1$.

On aura donc, en remplaçant chaque expression par la valeur minimum $(a + b)$, puis par la valeur maximum $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$,

$$\frac{p}{4} > \frac{\pi}{4} (a + b) \quad \text{ou} \quad p > \pi(a + b),$$

$$\frac{p}{4} < \frac{\pi}{4} \sqrt{2(a^2 + b^2)} \quad \text{ou} \quad p < \pi \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

(La suite prochainement.)

Note. Les deux limites de M. Peyronny, et d'autres plus rapprochées, ont été données la première fois par J. Bernoulli, d'après une génération organique d'une courbe *rampant* sur une autre, moyen simple et d'une extrême fécondité pour les périmètres des courbes, sur lesquels la géométrie ordinaire et celle des projections ne nous apprennent absolument rien; nous en entretiendrons nos lecteurs. Tm.