

A. G. COLOMBIER

Démonstration du théorème 68

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 22-23

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__22_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEMONSTRATION DU THÉOREME 68 (p. 327, t. II .

PAR P. A. G. COLOMBIER.

Regent de mathématiques à Beziers

Quatre points (o, s, o', s') (fig. 5) étant placés harmoniquement $(os : o's :: os' : o's')$ sur une droite (PQ) ; une circonférence qui passe par deux points conjugués (o, o') coupe orthogonalement la circonférence décrite sur la distance des deux autres points conjugués (s, s') comme diamètre.

Démonstration. Soit c le centre d'une circonférence passant par o, o' ; et c' celui de la circonférence décrite sur ss' comme diamètre. La circonférence qui a son centre en c devant passer par un point o' du diamètre ss' de l'autre circonférence, il est certain que les circonférences seront toujours secantes. Soit A l'un quelconque des deux points d'intersection. Il faut prouver que les tangentes menées aux circonférences par ce point sont orthogonales. Mais s'il en est ainsi, la tangente à l'une quelconque des deux circonférences est normale à l'autre en A ; dès lors, d'après un principe connu, ces deux normales doivent passer par les centres c, c' . Donc la question se réduit à prouver que le triangle cAc' est rectangle en A , ou, plus simplement, qu'on a la relation

$$\overline{cc'} = \overline{cA}^2 + \overline{Ac'}^2.$$

En effet, désignons par r le rayon de la circonférence c

$$\text{On a} \quad \overline{Ac'}^2 = r'^2. \quad (1)$$

Représentons $os, o's$ par a et b . dès lors, d'après la propor-

tion harmonique, on a $os' = a \frac{a+b}{a-b}$, et d'après la figure, il vient

$$2Ac' = ss' = os' - os = \frac{2ab}{a-b}, \text{ d'où}$$

$$\overline{Ac'} = \frac{a^2 b^2}{(a-b)^2}. \quad (2)$$

On trouve facilement d'après la proportion, et de ce que le triangle cBc' est rectangle,

$$\overline{cc'} = \overline{cB} + \frac{(a' + b')^2}{4(a-b)^2}.$$

Si l'on joint co' , le triangle rectangle cBo' donne

$$\overline{cB}^2 = r^2 + \frac{(a+b)^2}{4};$$

en éliminant $\overline{cB}^2$ par addition, et réduisant le second membre il vient

$$\overline{cc'} = r^2 + \frac{a^2 b^2}{(a-b)^2}. \quad (3)$$

De ce que l'équation (3) est la somme des équations (1), (2), il s'ensuit qu'on a

$$\overline{cc'} = \overline{cA}^2 + \overline{Ac'}.$$

Donc le triangle $cc'A$ est rectangle en A ; par conséquent les tangentes aux deux premières circonférences, menées par l'un quelconque de leurs points d'intersection, sont orthogonales.

C. Q. F. D.