

TERQUEM

**Théorèmes de Descartes, de Rolle, de
Budan et Fourier, de MM. Sturm et Cauchy,
déduits d'un seul principe**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 209-213

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__209_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES

DE DESCARTES, DE ROLLE, DE BUDAN ET FOURIER,
DE MM. STURM ET CAUCHY,

déduits d'un seul principe.

(Suite , v. p. 188.)

9. *Problème 3.* Étant donnée la fonction entière $\varphi(x)$, trouver une autre fonction entière $\psi(x)$, telle que, pour la fonction fractionnaire $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, $D_{\infty}(5)$ soit nulle entre les limites quelconques a et b .

Solution. Soit l une racine réelle de $\varphi(x)$, et supposons, pour plus de généralité, que cette racine soit multiple du degré m , de sorte que l'on a $\varphi(x) = (x - l)^m P$, où P est une fonction entière de (x) ; faisant $x = l + h$, la fonction fractionnaire devient $\frac{\psi(l + h)}{\frac{h^m}{[m]} \varphi^m l + \text{etc.}}$ $[m]$ est le produit conti-

nuel et $\varphi^m(l)$ est la dérivée de l'ordre m ; car, d'après la propriété connue des racines multiples, les fonctions dérivées qui précèdent φ^m sont nulles. Cette fraction peut s'écrire comme produit de deux facteurs, de cette manière $\frac{1}{h} \cdot \frac{\psi(l + h)}{h^{m-1} \frac{1}{[m]} \varphi^m l + \text{etc.}}$; pour que cette fraction ait toujours le

même signe que h , il faut que le second facteur soit toujours positif, c'est-à-dire que le numérateur et le dénominateur soient toujours de même signe; or, h étant infiniment petit, le signe est déterminé dans chaque suite par le premier terme. On satisfait donc de la manière la plus simple

à la condition de rendre le second facteur constamment positif en écrivant que le premier terme du numérateur est égal au premier terme du dénominateur, ce qui revient à écrire $\psi x = \varphi'(x)$; car alors le premier terme du numérateur est $\frac{h^{m-1}}{[m-1]} \varphi^m(l)$, et la fraction prend la forme $\frac{1}{h} \frac{m + hM}{1 + hN}$, où M et N représentent des fonctions entières de h et de l . Ainsi, pour h infiniment petit et négatif, c'est-à-dire pour $x = l - h$, le rapport $\frac{\varphi'(l-h)}{\varphi(l+h)}$ est négatif; et dans la même hypothèse et $x = l + h$, ce rapport est positif, et pour $h = 0$ le rapport est infiniment grand; donc il n'y a point de variation descendante lorsque la fraction passe par l'infini; ainsi $D_\infty = 0$; donc $\psi(x) = \varphi'(x)$ donne la solution la plus simple du problème.

Observation 1. $\varphi(x)$ ayant des racines multiples, $\frac{\varphi'(l)}{\varphi(l)}$ devient en apparence $\frac{0}{0}$; mais la valeur effective est infinie.

Obs. 2. P étant une fonction entière de x , $\varphi'x + P\varphi(x) = \psi x$ donne aussi une solution, car $\frac{\psi x}{\varphi x} = P + \frac{\varphi'x}{\varphi x}$ et le signe du premier membre est le même que celui de $\frac{\varphi'x}{\varphi x}$ lorsque cette fraction passe par l'infini (lemme 5). En général, soit $f(z)$ une fonction entière de z ne renfermant que des termes positifs et des exposants impairs; remplaçant z par $\varphi'(x)$, on obtient encore une fonction $\psi(x)$ qui satisfait au problème, vu que cette fonction est toujours de même signe que $\varphi'(x)$.

10. *Théorème 1.* Le nombre des racines réelles distinctes d'un polynôme algébrique entier $F(x)$ comprises entre les deux limites a et b est toujours égal à l'excès E, relatif au rapport $\frac{F'(x)}{F(x)}$.

Démonstration. Supposons m racines distinctes comprises entre a et b ; dans cet intervalle, le rapport $\frac{F'x}{Fx}$ passe donc m fois par l'infini, et pas davantage ; et toujours pour des variations ascendantes (problème 3) ; donc $E = m$.

Théorème de M. Sturm.

11. **Problème 4.** Trouver le nombre des racines réelles distinctes de l'équation $F(x) = 0$ comprises entre les deux limites a et b ? $a < b$.

Solution. On calcule les restes successifs $-F_2(x)$, $-F_3(x)$ $-F_r(x)$, que l'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de sa dérivée $F'(x)$; on écrit sur deux lignes les suites

$$F(a), F'(a), F_2(a), F_3(a) \dots F_r(a),$$

$$F(b), F'(b), F_2(b), F_3(b) \dots F_r(b),$$

ou seulement les signes de ces diverses quantités : autant la seconde ligne a de variations de moins que la première, autant il y a de racines réelles comprises entre a et b . Cette solution est une conséquence du théorème précédent et du problème 3.

Observation. E étant égal à m essentiellement positif, la seconde suite ne peut jamais avoir moins de variations que la première.

Théorème de Rolle.

12. **Théorème 2.** Le nombre de racines réelles de l'équation $F(x) = 0$, comprises entre les limites a et b , ne peut jamais surpasser de plus d'une unité le nombre de racines réelles de l'équation dérivée $F'(x) = 0$, comprises entre les mêmes limites.

Démonstration. Soient E et E' les excès relatifs aux fonctions réciproques $\frac{F'(x)}{Fx}$ et $\frac{F(x)}{F'(x)}$, on a $E + E' = \epsilon$ (5) ; or soit

encore m le nombre des racines réelles distinctes de $F(x) = 0$, comprises entre a et b , et m' le nombre des racines de $F'(x) = 0$ comprises entre les mêmes limites ; donc $E = m = -E' + \varepsilon$ (théorème 1). Si toutes les variations relatives à $\frac{F(x)}{F'(x)}$ étaient ascendantes, ou, ce qui revient au même, si toutes les variations relatives à $-\frac{F(x)}{F'(x)}$ étaient descendantes, dans ce cas on aurait $-E' = m'$. Ainsi m' est donc la plus haute valeur que puisse avoir $-E'$, et $+1$ est la plus haute valeur de ε ; donc la valeur la plus élevée de m est $m' + 1$, C. Q. F. D.

Théorèmes de Fourier et Budan.

13. *Théorème 3.* Le nombre des racines réelles de l'équation $F(x) = 0$, comprises entre les limites a et b , est tout au plus égal à la différence entre le nombre des variations des deux suites

$$F(a), F'(a), F''(a), \dots, F^n(a) \quad (1)$$

$$F(b), F'(b), F''(b), \dots, F^n(b) \quad (2)$$

dans lesquelles $F', F'', \dots, F^n$ représentent les dérivées successives de $F(x)$ et n le degré de l'équation $F(x) = 0$.

Démonstration. Soient $m, m', m'', \dots, m^{(n)}$ le nombre des racines des équations $F(x) = 0, F'(x) = 0, F''(x) = 0, \dots, F^n(x) = 0$, comprises entre les limites a et b , et $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots, \varepsilon^{(n)}$ les excès totaux relatifs aux rapports

$$\frac{F'(x)}{F(x)}, \frac{F''(x)}{F'(x)}, \frac{F'''(x)}{F''(x)}, \dots, \frac{F^n(x)}{F^{n-1}(x)}.$$

L'équation étant du degré n , on a $m^{(n)} = 0, \varepsilon^{(n)} = 0$; le théorème de Rolle donne

$$\begin{aligned} m &< m' + \varepsilon, \\ m' &< m'' + \varepsilon', \\ &\vdots \\ m^{(n-1)} &< m^{(n)} + \varepsilon^{(n-1)}; \end{aligned}$$

donc $m < \epsilon + \epsilon' + \epsilon'' + \dots \epsilon^{(n-1)}$; mais cette somme est égale au nombre des variations de la seconde suite, moins celle de la première (problème 2); donc... C. Q. F. D.

Théorème de Descartes.

14. *Théorème 4.* Le nombre des racines positives de l'équation

$$Fx = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots A_{n-1} x + A_n = 0$$

ne peut surpasser le nombre de variations de signe que présente la suite des coefficients 1, A_1 , A_2 , ..., A_{n-1} , A_n .

Démonstration. Dans le théorème de Fourier, prenons $a = 0$, $b = \infty$: la suite (1) devient A_n , A_{n-1} , 1.2.3. A_{n-2} ; 1.2.3. A_{n-3} , ..., $[n-1]A_1$; $[n].1$, et la suite (2), entièrement composée de termes positifs, n'offre aucune variation; donc, d'après le même théorème, le nombre des racines comprises entre 0 et ∞ ne peut dépasser le nombre des variations que présente la suite des coefficients A_n , A_{n-1} , ..., A_1 , $+1$, etc., C. Q. F. D.

Corollaire. Le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$ ne peut surpasser que d'une unité le nombre des racines positives de l'équation $F'(x) = 0$, lorsque les deux derniers termes de la fonction $F(x)$ forment une variation de signe.

Observation. Ainsi, de l'équation fondamentale $E + E' = \epsilon$, on a déduit tous les théorèmes énoncés; il reste encore celui de M. Cauchy.

Tm.

(La suite prochainement.)