

OSSIAN BONNET

Démonstration simple du théorème de Fourier

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 3
(1844), p. 119-121

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1844_1_3__119_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1844, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION SIMPLE DU THÉORÈME DE FOURIER.

PAR M. BONNET (OSSIAN)

—

Théorème. « Soit $X = 0$ une équation, et $X', X'', \dots X^{(m)}$ les
» dérivées successives du premier membre: la différence
» entre le nombre des variations de la suite $X, X', X'', \dots$
» $X^{(m)}$ pour $x = \alpha$, et le nombre des variations de la même
» suite pour $x = \beta$, ne peut jamais être moindre que le
» nombre des racines réelles de l'équation proposée, com-
» prises entre α et β , et la différence quand elle existe, est
» toujours un nombre pair. »

Démonstration. Supposons le théorème vrai pour toute équation du degré $(m - 1)$, et démontrons-le pour une équation de degré m ; étant évident pour une équation du premier ou du second degré, il se trouvera ainsi démontré généralement. Soient n et n' les nombres respectifs des racines de la proposée et de la dérivée comprises entre α et β . V_α, V'_α les nombres des variations de la suite $X, X', X'', \dots$ et de la suite $X', X'', \dots$ pour $x = \alpha$, et V_β, V'_β les nombres des variations des deux mêmes suites pour $x = \beta$; nous aurons d'après l'hypothèse

$$V'_\alpha - V'_\beta = n' + 2k,$$

(*) Dans ce cas, le maximum est à une des extrémités du grand axe et le minimum à l'autre extrémité

k étant au moins zéro, et d'après le théorème de Rolle,

$$n' - n = p,$$

p étant au moins -1 . Supposons d'abord que p soit un nombre pair $2k$, k étant au moins zéro; dans ce cas les valeurs X_α , X_β que prend X quand on fait successivement $x=\alpha$, $x=\beta$, et les valeurs X'_α , X'_β que prend X' pour les mêmes hypothèses présenteront en même temps une permanence ou une variation, par conséquent les valeurs X_α , X'_α que prennent X et X' pour $x=\alpha$, et les valeurs X_β , X'_β que prennent X et X' pour $x=\beta$, présenteront aussi en même temps une permanence ou une variation, donc on aura

$$V_\alpha - V_\beta = V'_\alpha - V'_\beta = n' + 2k = n + 2k + 2k';$$

ce qui est conforme à l'énoncé du théorème.

Supposons ensuite que p soit un nombre impair. Dans ce cas $\frac{X_\alpha}{X_\beta}$ et $\frac{X'_\alpha}{X'_\beta}$, par conséquent $\frac{X_\alpha}{X'_\alpha}$ et $\frac{X_\beta}{X'_\beta}$, auront des signes contraires, donc on aura

$$V_\alpha - V_\beta = V'_\alpha - V'_\beta \pm 1 = n + 2k + p \pm 1;$$

si p est positif, cette égalité est conforme à l'énoncé; si p est négatif, il faut encore démontrer que ± 1 se réduit à $+1$, ou que $V_\alpha - V_\beta = V'_\alpha - V'_\beta + 1$, ou que X_α et X'_α forment une variation. En effet, dans le cas où p est négatif, et par conséquent -1 , il ne peut se trouver qu'une racine de la dérivée entre deux racines consécutives quelconques de la proposée comprises entre α et β ; comme aussi entre la plus petite de ces racines et α , et entre la plus grande de ces racines et β , il n'y a aucune racine de la dérivée. Cela étant, α doit comme un nombre très-voisin, mais au-dessus d'une racine, rendre X et X' de signes contraires.

Remarque. Pour la manière de compter les variations, lorsque les hypothèses $x=\alpha$, $x=\beta$, font évanouir une ou

plusieurs fonctions de la suite , et pour les conséquences du théorème , *Voyez* l'ouvrage de Fourier, ou l'Algèbre de M. Lefébure de Fourcy.