NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relations d'identité et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 532-538

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__532_1>

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(Suite, v. 436.)

XLVII. *Théorèmes principaux concernant les foyers.*

Théorème I. La distance d'un point de la conique à un foyer divisée par sa distance à la directrice correspondante, est un quotient constant, moindre que l'unité dans l'ellipse, égal à l'unité dans le parabole, supérieur à l'unité dans l'hyberbole, dans le cercle ce quotient est nul.

Théorème II. Une corde étant parallèle à l'axe focal; dans l'ellipse, la somme des rayons vecteurs qui passent par les extrémités de la corde au même foyer est égale à l'axe focal; dans l'hyperbole, c'est la différence de ces rayons vecteurs qui est égale à l'axe focal.

THEOREME III. La somme des deux rayons vecteurs menés d'un même point de la courbe aux deux foyers, est constante dans l'ellipse; dans l'hyperbole, c'est la difference de ces rayons qui est constante.

THEORÈME III (bis). Dans l'ellipse, la somme des rayons vecteurs qui vont des extrémités d'un diamètre au même foyer est constante; dans l'hyperbole, la différence est constante, pour un diamètre qui rencontre.

THÉORÈME IV Le carré de la distance d'un point de la courbe à un foyer, divisé par le produit des distances de ce même point aux deux directrices, donne un quotient constant.

Observation. Ce théorème, conséquence immédiate du théorème I, est très-important, parce qu'il transporte aux surfaces du second degré, les propriétés focales des lignes planes du second degré. On doit cette belle généralisation à M. Amyot, professeur au collége de Saint-Louis, et il l'a consignée dans un memoire adressé à l'Académie des sciences (*Comptes rendus*, 1er Sem. 1843, p. 783); nous nous en occuperons lorsque nous en serons aux identités et équations fondamentales des surfaces du second degré.

THEOREME V. Toute corde passant par le foyer est égale au carré du $\frac{1}{2}$ diamètre parallèle divisé par l'axe focal.

Observation. Dans l'hyperbole, le diametre est terminé à l hyperbole conjuguée.

Démonstration. Prenant un foyer pour pôle, l'axe focal pour axe, l'équation polaire de l'ellipse est $z=\dfrac{b^2}{a-c\cos\varphi}$; en prenant le second foyer pour pôle, on a $z=\dfrac{b^2}{a+c\cos\varphi}$;

la somme de ces deux rayons vecteurs, pour la même valeur de φ, est égale à la corde qui passe par un de ces foyers et répondant à ce même angle φ; désignant cette corde par q, on aura $q=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\varphi}$; d étant la longueur du demi-diamètre parallèle à cette corde, on a (voy. p. 28) $d^2=\frac{a^2b^2}{a^2-c^2\cos^2\varphi}$: donc $q=\frac{2d^2}{a}$; C.Q.F.D.

THEORÈME VI. La somme des deux cordes conjuguées passant par un foyer est constante; la différence est constante dans l'hyperbole.

C'est une conséquence du théorème précédent et de la propriété des diamètres conjugués.

THÉORÈME VI (bis). Si l'on mène par le centre n demi-diamètres, partageant l'aire de l'ellipse en n parties équivalentes, la somme de toutes les cordes parallèles à ces demi-diamètres et passant par le même foyer est constante pour la même valeur de n.

Le théorème précédent est un cas particulier de ce théorème général que nous démontrerons plus loin.

THEORÈME VII. La somme des réciproques des segments formés par une corde passant par un foyer est une quantité constante.

Démonstration. Les réciproques des segments ont pour valeurs $\frac{a-c\cos\varphi}{b^2}$ et $\frac{a+c\cos\varphi}{b^2}$, dont la somme est égale à $\frac{2a}{b^2}$.

THÉORÈME VIII. La somme des réciproques des cordes rectangulaires qui passent par un foyer est constante dans l'ellipse; la différence est constante dans l'hyperbole; conséquence du théorème V.

THEORÈME IX. Une corde coupant une directrice, la droite qui joint le point d'intersection avec le foyer correspondant, est une bissectrice de l'angle des deux rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de la corde.

Démonstration. Soient M, M′, T, les extrémités de la corde et le point où elle rencontre la directrice, et F le foyer ; on a $\frac{FM}{FM'} = \frac{MT}{M'T}$; car, les distances des points M et M′ à la directrice, sont proportionnelles à MT et M′T; TF est donc bissectrice de l'angle formé par M′F et MF prolongé ; dans l'hyperbole, lorsque la corde est extérieure, le point T tombe entre M et M′, et alors la droite TF est bissectrice de l'angle MFM′ et non du supplément.

Theorème X. Une tangente coupant une directrice ; la droite qui joint le point d'intersection au foyer voisin, est perpendiculaire sur le rayon vecteur qui va au point de contact ; conséquence du théorème précédent.

Theorème XI. Le rayon vecteur qui va du foyer au point de rencontre de deux tangentes est bissecteur de l'angle forme par les rayons vecteurs qui vont aux deux points de contact.

Démonstration. Soient M, M′ les deux points de contac. T l'intersection de MM′ avec la directrice polaire du foyer F ; N le point de rencontre des deux tangentes; I le point où la droite FN coupe la corde MM′. Or, N étant le pôle de MM′ et F le pôle de la directrice, FN sera la polaire du point T. Donc le sécante TM est divisée harmoniquement aux points T,M′ I,M ; et les quatre droites FT, FM′, FI, FM, forment un faisceau harmonique. Mais FT est une bissectrice (théorème IX), donc FI est une bissectrice de l'angle M′FM ; C. Q. F. D.

Theorème XII. Une tangente mobile interceptée entre deux tangentes fixes, est vue de l'un et de l'autre foyer, toujours sous le même angle égal à la moitié de l'angle formé par les deux rayons vecteurs qui vont aux points de contact des tangentes fixes ; conséquence du théorème précédent.

Théorème XIII. Si une droite mobile, interceptée dans un angle fixe, est vue toujours sous le même angle d'un point fixe, situé dans le même plan, l'enveloppe de la droite mobile est une conique, décrite du point fixe comme foyer, et touchant les deux côtés de l'angle; c'est la réciproque du théorème précédent.

Théorème XIV. Le lieu géométrique de la projection d'un foyer sur une tangente, est un cercle concentrique à la conique, et d'un rayon égal à la moitié de l'axe focal; dans la parabole, ce cercle devient une droite tangente au sommet.

Théorème XV. Le lieu géométrique du point symétrique au foyer, relativement à une tangente, est un cercle, ayant pour centre le second foyer, et pour rayon, l'axe focal ; dans la parabole, ce cercle se confond avec la directrice.

Observation. M. le professeur Vincent a désigné le cercle sous le nom très-juste de *cercle directeur*, et M. le professeur Blum a fait voir que ce cercle peut servir, par un moyen simple, à décrire d'un mouvement continu les deux coniques à centre, de la même manière que la directrice a toujours été employée pour décrire la parabole (v. p. 60).

Théorème XVI. Un cercle assujetti à avoir son centre sur une conique, et à passer constamment par le même foyer, a pour enveloppe, le cercle directeur dont le centre est au second foyer.

Théorème XVII. La partie d'un rayon vecteur, interceptée entre deux diamètres conjugués, dont l'un passe par l'extrémité du rayon vecteur, est égale à la moitié de l'axe focal ; ce théorème est de M. Chasles.

Théorème XVIII. Si l'on prolonge la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente, jusqu'à la directrice correspondante, le point d'intersection et le point de contact, sont sur un même diamètre.

Théorème XIX. La projection de la normale sur le rayon vecteur qui passe par le point de départ de la normale, est égale à la moitié du paramètre de l'axe focal.

Théorème XX. La tangente, la normale et les deux rayons vecteurs qui passent par le point de contact, forment un faisceau harmonique; dans la parabole, un de ces rayons vecteurs devient un diamètre.

Théorème XXI. Dans l'ellipse, le produit des deux rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités d'un diamètre, plus le produit des rayons vecteurs qui vont aux extrémités du diamètre conjugué, est une somme constante.

Cette proposition est de M. Brassine, professeur à l'école d'artillerie de Toulouse.

Théorème XXII. La normale, terminée au grand axe, et multipliée par la distance du foyer à la tangente, et divisée par le rayon vecteur, est une quantité constante.

Théorème XXIII. Dans l'ellipse, la demi-somme des angles sous lesquels une corde est vue des deux foyers, plus l'angle sous lequel la corde est vue de son pôle, est égale à deux angles droits.

Démonstration. Soient F et F' les deux foyers; TT' la corde; C le pôle de la corde; et soient menées les droites FT, FT', F'T, F'T', CT, CT'; faisons $FTF' = \alpha$; $FT'F' = \beta$ d'apres une propriéte connue, l'on a :

$FTC = 1^q + \frac{1}{2}\alpha$; $F''TC = 1^q - \frac{1}{2}\alpha$; $F'T'C = 1^q + \frac{1}{2}\beta$; $FT'C = 1^q - \frac{1}{2}\beta$:

le quadrilatère FTCT′ donne

$$T + C + T' + F' = 4^q = 1^q - \tfrac{1}{2}\alpha + C + 1^q + \tfrac{1}{2}\beta + F' ;$$

d'où

$$C + F' + \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) = 2^q ;$$

le quadrilatère F′T′CT donne de même :

$$C + F + \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = 2^q$$

ajoutant ces équations, et divisant par 2, il vient

$$C + \tfrac{1}{2}(F + F') = 2^q, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Observation. Dans l'hyperbole, la demi-somme est remplacée par la demi-différence ; dans la parabole, l'angle sous lequel la corde est vue, du foyer situé à l'infini, devient nul.

Théorème XXIV. La bissectrice d'un angle circonscrit à une conique est également la bissectrice de l'angle formé par les deux droites qui vont du sommet aux deux foyers.

Démonstration. Dans le triangle CTF on a

$$CTF + TFC + FCT = 2^q = 1^q + \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}TFT' + FCT ;$$

d'où

$$FCT = 1^q - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}TFT',$$

et de même

$$F'CT' = 1^q - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}T'F'T ,$$

mais

$$\alpha + TFT' = \beta + T'F'T ;$$

donc

$$FCT = F'CT' ; \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème est de M. Poncelet. Prop. projectives, p. 277.