Nouvelles annales de mathématiques

Roche

Problème sur une droite minimum

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 488-492

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__488_1>

PROBLÈME SUR UNE DROITE MINIMUM.

PAR M. ROCHE,

Professeur à l'École d'artillerie de la marine.

1. Étant donné un point dans l'intérieur d'un angle, déterminer la direction d'une droite passant par ce point, de manière que la ligne interceptée entre les côtés soit un minimum.

Solution.

Soit CAB (*fig.* 96) l'angle donné et D le point intérieur. Supposons que la droite GDH soit la ligne cherchée. Menons du point D deux parallèles DP et DQ aux côtés de l'angle AC et AB. Désignons AP par p et AQ par q, et les lignes inconnues PH par x et GQ par y. Ces deux inconnues seront liées entre elles par les rapports égaux $\frac{y}{q}=\frac{p}{x}$ résultant des triangles semblables GQD, DPH. On aura ainsi AH $= p+x$.

$y = \frac{pq}{x}$; $AG = q + y = q\,\frac{(p+x)}{x}$; on pourra donc évaluer la distance GH que je représente par z d'après la formule trigonométrique $GH^2 = AG^2 + AH^2 - 2\,AG.AH \cos A$, A désignant l'angle CAB; cette équation deviendra par les valeurs précédentes

$$(z) \qquad z^2 = \frac{(p+x)^2\,(x^2+q^2-2\,qx \cos A)}{x^2}$$

Pour exprimer la condition du minimum, je calcule la fonction dérivée du second membre et en l'égalant à zéro, j'ai l'équation suivante en représentant par c l'expression $\cos A$:

$$(x) \qquad x^3 - qcx^2 + pqcx - pq^2 = 0.$$

On obtiendrait de la même manière l'équation en y qui serait (y), $y^3 - pcy^2 + pqcy - qp^2 = 0$. On peut simplifier ces équations en représentant par m le rapport $\frac{p}{x} = \frac{y}{q}$ et par r le rapport $\frac{p}{q}$ que l'on peut toujours considérer comme plus petit que l'unité en comptant la distance x sur le côté de l'angle le plus éloigné du point D; en substituant donc pour x sa valeur $\frac{p}{m}$ ou pour y sa valeur qm et pour p sa valeur qr, les deux équations donneront

$$(m) \qquad m^3 - c\,m^2 + crm - r^2 = 0.$$

Avant de discuter cette équation, il convient d'examiner les cas les plus simples pour quelques-uns desquels la solution est déjà connue.

Premier cas $p = 0$, ou $q = 0$.

2. Ces deux cas sont ceux où le point D se trouve sur un des côtés de l'angle. Si l'on a $q = 0$, l'équation (x) devient $x = 0$, l'équation y donne $y = pc$, ou $y = p \cos A$, ce qui

indique que la ligne minimum est PG perpendiculaire a AB. Si l'on avait $p=0$, on aurait pareillement $x=q\cos A$, ce qui donnerait pour ligne minimum QH perpendiculaire à AB.

Second cas $q=p$, ou $r=1$

3. L'équation (m) devient $m^3-cm+cm^2-1=0$ qu'on peut mettre sous la forme

$$(m-1)\,(m^2+(1-c)\,m+1)=0$$

Cette équation donne pour seule racine réelle $m=1$, d'où l'on déduit $x=p, y=q$, ce qui indique que le triangle AGH est isocèle et que la ligne GH est perpendiculaire à la bissectrice AD.

Troisième cas, $\cos A=0$, ou $A=90^\circ$.

4. Dans ce cas, l'équation (m) se réduit à $m^3=r^2$ et donne $m=\sqrt[3]{r^2}$. On a pareillement $x^3=pq^2$, $y^3=qp^2$, d'où l'on déduit $x=q\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, $y=p\sqrt[3]{\frac{q}{p}}$. Ce cas offre un moyen simple de résoudre le problème de la duplication du cube, et en général de la multiplication du cube, en déterminant par un tâtonnement géométrique ou par la construction géométrique de l'équation (z), où x représente l'abscisse et z l'ordonnée, le minimum de l'ordonnée; si $p=zq$ on aura $x=q\sqrt[3]{2}$

Discussion de l'équation générale.

5. L'équation en m ayant son dernier terme négatif, a nécessairement une racine positive; si l'angle A est obtus c devient négatif et l'équation prend la forme $m^3+crm^2-crm-r^2=0$. Cette équation offrant deux permanences de signe et une seule variation, ne peut admettre qu'une racine positive, et les racines négatives seraient étrangères à la ques-

tion, vu que la ligne qui en résulterait ne rencontrerait qu'un des côtés de l'angle ; il suffit donc de considérer le cas de l'angle aigu où c est positif, je fais évanouir le second terme de l'équation en faisant $m = m' + \frac{cr}{3}$, l'équation transformée devient

$$m') \qquad m'^3 + \frac{cr(3-cr)}{3} m' - \frac{(2c^3r^3 + 27r^3 - 9c^2r^2)}{27} = 0.$$

Puisque nous supposons $r < 1$, le second terme de l'équation précédente est nécessairement positif, conséquemment l'équation n'a qu'une racine réelle. On conçoit facilement que le cas de $r > 1$ se ramenerait à celui-ci en faisant $r = \frac{1}{r'}$ et $m = \frac{1}{n}$, car l'équation deviendrait

$$(n) \qquad n^3 - cr'n^2 + cr'n - r'^3 = 0$$

Quatrième cas, $r' = \frac{3}{c}$, $r = \frac{c}{3}$

6. Dans ces deux cas, l'équation (m) ou l'équation (n) se reduira à une simple extraction de racines ; en effet, dans le premier cas, le second terme de l'équation (m') disparaîtra et l'on aura

$$m' = \sqrt[3]{r^3 - 1} = \sqrt[3]{\frac{9 - c^2}{c^2}}$$

Dans ce cas, r est nécessairement plus grand que 1. Dans le cas ou r est plus petit que 1, on opérerait sur l'équation (n) semblable à l'équation (m) et l'équation en n', privée de second terme, se réduirait à une extraction de racine dans le cas de $r' = \frac{3}{c}$ ou $r = \frac{c}{3}$ et l'on aurait

$$n' = n + cr' = \sqrt[3]{r'^3 - 1} = \sqrt[3]{\frac{9 - c^2}{3}}$$

Limites des racines.

7. L'équation (m), si on veut la résoudre numériquement donne immédiatement les limites des racines en la mettant sous la forme.

$$m^3 - r^2 - crm\ (m - 1) = 0.$$

En effet, supposons d'abord c positif la supposition $m = \sqrt[3]{r^2}$, r étant supposé plus petit que l'unité, donnera pour le premier membre un résultat positif, puisque $m - 1$ sera négatif; la supposition de $m = r'$ donnera un resultat négatif $r^2\ (1 - c)\ (r - 1)$. Si c est négatif, la première supposition donnera un résultat négatif; et la seconde en faisant $m = 1$, donnera un résultat positif $1 - r^2$.

Dans le premier cas, les valeurs de m sont comprises entre $r^{\frac{2}{3}}$ et r, et dans le second, entre $r^{\frac{2}{3}}$ et 1. Ce qui fait voir que ces valeurs sont toujours fractionnaires.

On en conclut que si p est plus petit que q, ou $r < 1$, on a $\frac{p}{x} < 1$ ou $x > p$, et $\frac{y}{q} > 1$ ou $y > q$.

Observations.

8. Les équations (m) et (n) ne contenant que le rapport des coordonnées obliques p et q, font voir que pour tous les points situés sur la droite AD, les lignes minimum sont parallèles entre elles.

On voit aussi que les limites des racines sont indépendantes de l'angle A.

Note. La droite GDH est tangente au point D à l'enveloppe que décrit une droite de longueur constante, inscrite dans l'angle; l'enveloppe devant passer par le point D. (*V.* p. 265, t. I.)