

J. MARCOU

Théorème sur la cissoïde

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 486-488

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__486_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEOREME SUR LA CISSOÏDE.

PAR M. MARCOU (J.),

Elève au collège de Besançon.

Deux circonférences sont tangentes extérieurement l'une à l'autre, on mène à ces deux circonférences, une tangente commune; le rayon de la première étant constant et celui de la seconde étant variable, le point de tangence de cette dernière circonférence décrit une cissoïde (*fig. 91*).

Je prends pour axe des y , la perpendiculaire au point de contact des deux cercles, et la ligne des centres pour l'axe des x ; soit $CO = R$; $C'O = \alpha$, R est constant et α est variable.

L'équation du cercle C est $y^2 + x^2 + 2Rx = 0$.

L'équation du cercle C' est $y^2 + x^2 - 2\alpha x = 0$.

Les points (x', y') , (x'', y'') étant sur les cercles, on a les relations

$$y'^2 + x'^2 + 2Rx' = 0, \quad (1)$$

$$y''^2 + x''^2 - 2\alpha x'' = 0. \quad (2)$$

Pour exprimer que les deux cercles ont une tangente commune, j'égalé les deux coefficients d'inclinaison, et

j'exprime qu'elles coupent l'axe des y au même point A.

Ce qui me donne les deux relations

$$\frac{x' + R}{y'} = \frac{x'' - \alpha}{y''}, \quad (3)$$

$$- \frac{R x'}{y'} = \frac{\alpha x''}{y''}. \quad (4)$$

Eliminant entre les 4 équations (1), (2), (3), (4) x' , y' et α , on aura l'équation du lieu des points (x'', y'') . De (3) je

tire $x' = \frac{y' (x'' - \alpha) - R y''}{y'}$;

de (4) je tire $x' = - \frac{\alpha x'' y'}{R y''}$, égalant ces deux valeurs, on en déduit

$$y' = \frac{R y''}{R (x'' - \alpha) + \alpha x''},$$

$$\text{et } \alpha = \frac{- \alpha R y''}{R (x'' - \alpha) + \alpha x''}.$$

Remplaçant y' et x' par ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$R' y''^2 - 2 \alpha R x''^2 + 2 \alpha^2 R x'' - \alpha^3 x''^2 = 0,$$

$$\text{ou } x' (2 R x'' - x''^2) - 2 R x'' \alpha + R^2 y''^2 = 0$$

De l'équation (2) je tire $\alpha = \frac{y''^2 + x''^2}{\alpha x''}$, remplaçant α par

cette valeur dans la dernière équation, il vient

$$\frac{y''^2 + x''^2}{4 x''} (2 R - x'') - \frac{2 R x'' (y''^2 + x''^2)}{2 x''} + R' y''^2 = 0$$

ou, supprimant les accents.

$$(y^2 + x^2) (2 R - x) - 2 R x (y^2 + x^2) + 4 R' y^2 x = 0.$$

$$y^2 + x^2 + 2 R x - 2 R y - x (y^2 + x^2) (2 R x + y^2 + x^2) = 0.$$

$$\text{ou enfin } (y^2 + x^2 + 2 R x) (2 R y - x y^2 - x^3) = 0.$$

Le premier facteur égale à zéro, représente le cercle C dont le rayon est constant et le second facteur est l'équa-

tion d'une cissoïde qui a pour cercle générateur un cercle symétrique au cercle C, relativement à l'axe des y .

Note. Le facteur $y^2 + x^2 + 2Rx = 0$ est l'enveloppe de la droite mobile. Lorsque R devient négatif, les circonférences se touchent intérieurement, et n'ont qu'une tangente commune; toutefois la cissoïde reste réelle; que signifie-t-elle alors? Si R est aussi variable et qu'on donne entre α et R, la relation $F(\alpha, R) = 0$, il suffit, pour obtenir le lieu du point de contact sur le cercle α , de substituer dans la relation $\alpha = \frac{y^2 + x^2}{2x}$ et $R = \frac{x(y^2 + x^2)}{2y^2}$; ou bien $R = -\frac{y^2 + x^2}{2x}$; $\alpha = \frac{x(y^2 + x^2)}{2y^2}$, pour avoir le lieu relatif au cercle R. Tm.