

HUET

**Questions d'examen. Volumes engendrés
par les polygones réguliers lorsqu'ils
tournent autour d'un de leurs côtés**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 474-480

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__474_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS D'EXAMEN.

Volumes engendrés par les polygones réguliers lorsqu'ils tournent autour d'un de leurs côtés.

(Fin. — V. p. 353.)

PAR M. HUET,

Regent de physique au college de Pamiers, ancien professeur de mathématiques spéciales à l'école de Sorrèze

6^e Décagone (fig. 88).

$$\text{vol D} = \text{vol ABFG} + 2\text{vol FEDCB} = \text{vol R} + 2\text{vol K}.$$

$$\text{Or} \quad \text{vol K} = \text{vol FECB} + \text{vol EDC},$$

$$\text{vol FECB} = \text{vol FECIB} - \text{vol BCI} = \text{vol T} - \text{vol T'},$$

$$\text{vol EDC} = \text{vol EDKI} - \text{vol DCIK} = \text{vol } t - \text{vol } t'.$$

Préparation.

$$\text{On trouve facilement } Om = \frac{1}{2}c \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

D'ailleurs, on a

$$mn = c \sqrt{5+2\sqrt{5}} = BF; \quad \overline{OD}^2 = \frac{1}{4}c^2(6+2\sqrt{5}).$$

$$\text{d'où} \quad OD = \frac{c}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}},$$

ou, en vertu d'une formule connue,

$$OD = \frac{c}{2}(1 + \sqrt{5});$$

EC sous-tendant le $\frac{1}{5}$ de la circonférence est égal au côté du pentagone, on a donc

$$\overline{EC} = \overline{OD} + \overline{ED} = \frac{c}{4}(6+2\sqrt{5}) + c = \frac{c}{4}(10+2\sqrt{5}).$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } EC &= \frac{c}{2} \sqrt{10+2\sqrt{5}}; \quad EP = \frac{c}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}; \quad EI = \\ &= IP+EP=EP+On = \frac{1}{4} c \sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{c}{2} \sqrt{5+2\sqrt{5}} = \\ &= \frac{c}{4} \left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{5+2\sqrt{5}} \right); \end{aligned}$$

$$CI=PI-PC=On-EP=\frac{c}{4}(2\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}});$$

$$\begin{aligned} BI &= \sqrt{BC^2 - CI^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{16}(30+10\sqrt{5}) - 4\sqrt{70+30\sqrt{5}}} = \\ &= \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{16}(10-2\sqrt{5})} = \frac{c}{4} \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{c}{4} (1+\sqrt{5}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IK &= PD=OD-OP=OD-(nB+BI)=\frac{1}{2}c(\sqrt{5}+1)- \\ &-\left(\frac{1}{2}c+\frac{c}{4}(1+\sqrt{5})\right)=\frac{c}{2}\sqrt{5}-\frac{c}{4}(1+\sqrt{5})=\frac{c}{4}(\sqrt{5}-1); \end{aligned}$$

$$DK=On=Om=\frac{1}{2}c\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cela posé, on a } \text{volR} &= c \cdot \pi c^2 (5+2\sqrt{5}) = \pi c^3 (5+2\sqrt{5}); \\ \text{volT} - \text{volT}' &= \frac{1}{3} \pi BI \left\{ \overline{BF} + BF \cdot EI + \overline{EI}^2 - \overline{CI}^2 \right\} = \frac{1}{3} \pi BI \\ &\left\{ \overline{BF}^2 + BF \cdot EI + (EI + CI)(EI - CI) \right\} = \frac{1}{3} \pi BI \\ &(\overline{BF}^2 + BF \cdot EI + BF \cdot EC) = \frac{1}{3} \pi BI \cdot BF (BF + EI + EC) = \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{1}{4} c^2 (1+\sqrt{5}) \sqrt{5+2\sqrt{5}} \left\{ c \sqrt{5+2\sqrt{5}} + \right. \\ &+ \frac{1}{4} c \left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{5+2\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{2} c \sqrt{10+2\sqrt{5}} \left\} = \\ &= \frac{1}{4} \pi c^3 (1+\sqrt{5}) \sqrt{5+2\sqrt{5}} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{5+2\sqrt{5}} + \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \pi c^3 (1+\sqrt{5}) \left\{ \frac{1}{2} (5+2\sqrt{5}) + \frac{1}{4} \sqrt{70+30\sqrt{5}} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \pi c^3 (1 + \sqrt{5}) \left\{ \frac{1}{2} (5 + 2\sqrt{5}) + \frac{1}{4} (5 + 3\sqrt{5}) \right\} = \\
 &= \frac{1}{16} \pi c^3 (1 + \sqrt{5}) (15 + 7\sqrt{5}) = \frac{1}{16} \pi c^3 (50 + 22\sqrt{5}) = \\
 &= \frac{1}{8} \pi c^3 (25 + 11\sqrt{5}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}t - \text{vol}t' &= \frac{1}{3} \pi \text{IK} (\overline{\text{EI}}^2 + \overline{\text{DK}}^2 + \text{EI} \cdot \text{DK} - \overline{\text{CI}}^2 - \overline{\text{DK}}^2 - \text{CI} \cdot \text{DK}) = \\
 &= \frac{1}{3} \pi \text{IK} \left\{ (\text{EI} + \text{CI}) (\text{EI} - \text{CI}) + \text{DK} (\text{EI} - \text{CI}) \right\} = \\
 &= \frac{1}{3} \pi \text{IK} (\text{BF} \cdot \text{EC} + \text{DK} \cdot \text{EC}) = \frac{1}{3} \pi \cdot \text{IK} \cdot \text{EC} (\text{BF} + \text{DK}) = \\
 &= \frac{1}{3} \pi \cdot \text{IK} \cdot \text{EC} \cdot 3\text{DK} = \pi \cdot \text{IK} \cdot \text{EC} \cdot \text{DK} = \\
 &= \pi \cdot \frac{1}{4} c (\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{1}{2} c \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} c \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \\
 &= \frac{1}{16} \pi c^3 (\sqrt{5} - 1) \sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(5 + 2\sqrt{5})} = \\
 &= \frac{1}{16} \pi c^3 (\sqrt{5} - 1)(5 + 3\sqrt{5}) = \frac{1}{16} \pi c^3 (10 + 2\sqrt{5}) = \frac{1}{8} \pi c^3 (5 + \sqrt{5}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc, vol K} &= \frac{1}{8} \pi c^3 (5 + \sqrt{5}) + \frac{1}{8} \pi c^3 (15 + 11\sqrt{5}) = \\
 &= \frac{1}{8} \pi c^3 (30 + 12\sqrt{5}) = \frac{1}{4} \pi c^3 (15 + 6\sqrt{5}) = \frac{3}{4} \pi c^3 (5 + 2\sqrt{5}).
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } 2\text{vol K} = \frac{3}{2} \pi c^3 (5 + 2\sqrt{5});$$

$$\text{ajoutant, vol R} = \pi c^3 (5 + 2\sqrt{5}).$$

$$\text{Donc enfin, vol D} = \frac{5}{2} \pi c^3 (5 + 2\sqrt{5}).$$

7° *Dodécagone* (fig. 89).

$$\text{Vol D} = \text{vol HGBA} + 2\text{vol GFEDCB} = \text{vol R} + 2\text{vol K}.$$

$$\text{Vol K} = \text{vol GFCB} + \text{vol FEDC}.$$

$$\text{Vol GFCB} = \text{vol GFIB} - \text{vol BCI} = \text{vol T} - \text{vol T'}.$$

$$\text{Vol FECB} = \text{vol FEKI} - \text{vol DKIC} = \text{vol t} - \text{vol t'}.$$

Préparation.

On trouve aisément $Om = \frac{1}{2}c(2 + \sqrt{3})$; d'ailleurs

$$mn = 2Om = c(2 + \sqrt{3}); \overline{OF}^2 = \overline{OG}^2 = \overline{Om}^2 + \overline{mG}^2 = c^2(2 + \sqrt{3}),$$

$$\text{d'où } OF = c\sqrt{2 + \sqrt{3}} = c\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{c}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2});$$

FC est le côté du carré inscrit, il est égal à $FO\sqrt{2}$, d'après le triangle rectangle FOC.

$$\text{Donc, } FC = \frac{1}{2}c(\sqrt{12} + 2) = c(1 + \sqrt{3}); \quad qC = \frac{1}{2}c(1 + \sqrt{3});$$

$$CI = qI - qC = \frac{1}{2}c(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{2}c(1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}c;$$

$$BI = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CI}^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c}{2}\sqrt{3}; \quad nI = nB + BI =$$

$$= \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c\sqrt{3} = \frac{1}{2}c(1 + \sqrt{3}) = qC; \quad IK = NK - NI = OP - nI =$$

$$= \frac{1}{2}c(2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{2}c(1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}c; \quad FI = FC + IC =$$

$$= \frac{c}{2} + c(1 + \sqrt{2}) = \frac{1}{2}c(3 + 2\sqrt{3}); \quad EK = EP + PK =$$

$$= \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c(2 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}c(3 + \sqrt{3}); \quad DK = PK - PD =$$

$$= \frac{1}{2}c(\sqrt{3} + 2) - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c(1 + \sqrt{3}).$$

Cela posé,

$$\text{Vol R} = c \cdot \pi \cdot c^2(2 + \sqrt{3})^2 = \pi c^3(7 + 4\sqrt{3}).$$

$$\begin{aligned} \text{Vol T} - \text{vol T}' &= \frac{\pi}{3} \text{BI}(\overline{\text{BG}}' + \overline{\text{FI}}' + \text{BG.FI} - \overline{\text{CI}}') = \frac{1}{3} \pi \text{BI} \\ &\{ \text{BG}(\text{BG} + \text{FI}) + (\text{FI} + \text{CI})(\text{FI} - \text{CI}) \} = \frac{1}{3} \pi \text{BI} \{ (\text{EG} + \text{FI}) \text{BG} + \\ &+ \text{BG.FC} \} = \frac{1}{3} \pi \text{BI.BG}(\text{BG} + \text{FI} + \text{FC}) = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{1}{2} c \sqrt{3} \cdot c(2 + \sqrt{3}) \\ &\{ c(2 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} c(3 + 2\sqrt{3}) + c(1 + \sqrt{3}) \} = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{1}{2} c \sqrt{3} \\ &c(2 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} c(3 + 2\sqrt{3}) = \frac{1}{4} \pi c^3 (3 + 2\sqrt{3})^2 = \\ &= \frac{1}{4} \pi c^3 (21 + 12\sqrt{3}) = \frac{3}{4} \pi c^3 (7 + 4\sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol t} - \text{vol t}' &= \frac{1}{3} \text{IK} \cdot \pi (\text{FI}' + \overline{\text{EK}}' + \text{FI.EK} - \overline{\text{CI}}' - \overline{\text{DK}}' - \text{CI.DK}) = \\ &= \frac{1}{3} \pi \text{IK} \{ (\text{FI} + \text{CI})(\text{FI} - \text{CI}) + (\text{EK} + \text{DK})(\text{EK} - \text{DK}) + \text{FI.EK} - \\ &- \text{CI.DK} \} = \frac{1}{3} \pi \text{IK} \{ \text{BG}(\text{FC} + \text{ED}) + \text{FI.EK} - \text{CI.DK} \} = \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{1}{2} c \{ c(2 + \sqrt{3})c(2 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} c(3 + 2\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} c(3 + \sqrt{3}) - \\ &- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} c(1 + \sqrt{3}) \} = \frac{1}{6} \pi c^3 \{ (2 + \sqrt{3})^2 + \frac{1}{2} (7 + 4\sqrt{3}) - \\ &= \frac{1}{6} \pi c^3 \{ 7 + 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} (7 + 4\sqrt{3}) \} = \frac{1}{4} \pi c^3 (7 + 4\sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } \text{vol K} &= \frac{3}{4} \pi c^3 (7 + 4\sqrt{3}) + \frac{1}{4} \pi c^3 (7 + 4\sqrt{3}) = \\ &= \pi c^3 (7 + 4\sqrt{3}) = \text{vol R}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \text{vol D} = \text{vol R} + 2\text{vol K} = 3\text{vol R} = 3\pi c^3 (7 + 4\sqrt{3}).$$

8. Vérifions maintenant ces résultats en calculant ces mêmes volumes par le théorème de Guldin.

Le centre de gravité d'un polygone régulier est au centre du cercle inscrit dans ce polygone, et le rayon de la circonférence qu'il décrit autour d'un côté est l'apothème dont la valeur est

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - c^2}$$

La circonférence $2\pi r = \pi \sqrt{4R^2 - c^2}$; donc en général le volume V est donné par la formule

$$V = S\pi\sqrt{4R^2 - c^2},$$

S étant la surface du polygone générateur. Appliquons cette formule aux sept polygones que nous venons de considérer.

1° Pour le triangle on a

$$V = \frac{1}{4} c^2 \sqrt{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} c \sqrt{3} = \frac{1}{4} \pi c^3$$

2° Pour le carré on a

$$V = c^2 \cdot \pi \cdot c = \pi c^3.$$

3° Pour le pentagone on a

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4} c^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot \pi \frac{c}{5} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1}{4} \pi c^3 (5 + 2\sqrt{5}). \end{aligned}$$

4° Pour l'hexagone on a

$$V = \frac{3}{2} c^2 \sqrt{3} \cdot \pi c \sqrt{3} = \frac{9}{2} \pi c^3$$

5° Pour l'octogone on a

$$\begin{aligned} V &= 2c^2 (1 + \sqrt{2}) \cdot \pi c (1 + \sqrt{2}) = \pi c^3 (6 + 4\sqrt{2}) = \\ &= 2\pi c^3 (3 + 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

6° Pour le décagone on a

$$V = \frac{5}{2} c^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \cdot \pi c \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{5}{2} \pi c^3 (5 + 2\sqrt{5}).$$

7° Pour le dodécagone on a

$$\begin{aligned} V &= 3 c^2 (2 + \sqrt{3}) \cdot \pi c (2 + \sqrt{3}) = \pi (21 + 12\sqrt{3}) c^3 = \\ &= 3\pi c^3 (7 + 4\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Résultats tout à fait identiques aux précédents

Cette dernière méthode suppose qu'on a calculé d'avance S pour chacun des polygones ci-dessus. Ce calcul n'offre aucune difficulté, je me dispenserai de le développer

Si on demandait les volumes précédents, en fonction de R ou en fonction de r , on les obtiendrait immédiatement en mettant dans les résultats que nous avons trouvés à la place de c , ou sa valeur en fonction de R , ou sa valeur en fonction de r , valeurs qu'on trouverait sans difficulté. On pourrait d'ailleurs suivre pour les trouver directement l'une des deux méthodes que nous avons suivies, et on trouverait par exemple pour les volumes en fonction de R :

$$1^{\circ} \text{ Triangle, } V = \frac{3}{4} \pi R^3 \sqrt{3};$$

$$2^{\circ} \text{ Carré, } V = 2 \pi R^3 \sqrt{2};$$

$$3^{\circ} \text{ Pentagone, } V = \frac{5}{4} \pi R^3 \sqrt{5 + 2 \sqrt{5}};$$

$$4^{\circ} \text{ Hexagone, } V = \frac{9}{2} \pi R^3;$$

$$5^{\circ} \text{ Octogone, } V = 2 \pi R^3 \sqrt{4 + 2 \sqrt{2}};$$

$$6^{\circ} \text{ Décagone, } V = \frac{5}{2} \pi R^3 \sqrt{5};$$

$$7^{\circ} \text{ Dodécagone, } V = \frac{3}{2} \pi R^3 (\sqrt{2} + \sqrt{6}).$$