

P. A. G. COLOMBIER

Démonstration du théorème 72

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 468-471

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__468_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DU THÉOREME 72 (page 327, t. II).

PAR P. A. G. COLOMBIER.

Regent de mathématiques à Béziers.

THEOREME. A et B sont deux nombres entiers et positifs ayant plus de la moitié des chiffres à gauche en commun , et $A > B$. On a toujours

$$A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{p},$$

p étant un nombre entier positif.

Démonstration. Il résulte de cet énoncé que A et B ont nécessairement le même nombre de chiffres, et que le nombre des chiffres à droite non communs est le même dans les deux nombres. Désignons-le par k . Appelons α le nombre formé sur la gauche dans A et B par les chiffres communs considérés dans leur valeur relative; et a', b' les nombres formés sur la droite dans A et B pour les chiffres non communs, considérés dans leur valeur relative. On a

$$a' > b' \quad \text{et} \quad A = \alpha + a', \quad B = \alpha + b'.$$

Elevons à la puissance $\frac{1}{p}$ la valeur de A; il vient

$$A^{\frac{1}{p}} = \alpha^{\frac{1}{p}} + \frac{a'}{p \alpha^{1-\frac{1}{p}}} - \frac{(p-1) a'^2}{1.2.p^2 \alpha^{2-\frac{1}{p}}} + \frac{(p-1)(2p-1) a'^3}{1.2.3.p^3 \alpha^{3-\frac{1}{p}}} - \dots$$

$$+ \frac{(p-1)(2p-1)3p-1) \dots (r-1)p-1) a'^r}{1.2.3 \dots r.p^r \alpha^{r-\frac{1}{p}}} + \dots$$

On prend les signes supérieurs ou les signes inférieurs, suivant que r est impair ou pair

Le développement de $B^{\frac{1}{p}}$ s'obtiendra en changeant dans celui de $A^{\frac{1}{p}}$, a' en b' . Il vient :

$$B^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{1}{p}} + \frac{b'}{p\alpha^{\frac{1}{p}-1}} - \frac{(p-1)b'^2}{1.2.p^2\alpha^{\frac{2}{p}-1}} + \frac{(p-1)(2p-1)b'^3}{1.2.3p^3\alpha^{\frac{3}{p}-1}} - \dots$$

$$\pm \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1) \dots (r-1)p^{r-1}b'^r}{1.2.3 \dots r.p^r\alpha^{\frac{r}{p}-1}} \mp \dots$$

d'où

$$A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} = \frac{a'-b'}{p\alpha^{\frac{1}{p}-1}} - \frac{(p-1)(a'^2-b'^2)}{1.2.p^2\alpha^{\frac{2}{p}-1}} + \frac{(p-1)(2p-1)(a'^3-b'^3)}{1.2.3.p^3\alpha^{\frac{3}{p}-1}} - \dots$$

$$\pm \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1) \dots (r-1)p^{r-1}(a'^r-b'^r)}{1.2.3 \dots r.p^r\alpha^{\frac{r}{p}-1}} \mp \dots$$

ou bien ,

$$p \left[A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} \right] = \frac{a'-b'}{\alpha^{\frac{1}{p}-1}} \left\{ 1 - \frac{(p-1)\frac{a'^2-b'^2}{a'-b'}}{1.2.p\alpha} + \frac{(p-1)(2p-1)\frac{a'^3-b'^3}{a'-b'}}{1.2.3.p^2\alpha^2} - \dots \right.$$

$$\left. \pm \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1) \dots (r-1)p^{r-1}\frac{a'^r-b'^r}{a'-b'}}{1.2.3 \dots r.p^{r-1}\alpha^{r-1}} \mp \dots \right\}$$

La différence $a' - b'$ a au plus k chiffres. $\alpha^{\frac{1}{p}-1}$ sera le plus petit possible, et il en sera de même de $1 - \frac{1}{p}$, c'est-à-

dire, lorsqu'on aura $p=2$. Dès lors $\alpha^{\frac{1}{p}-1} = \sqrt{\alpha}$. Le nombre de chiffres de α étant $2k+1$, il s'ensuit que $\sqrt{\alpha}$ a $k+1$ chiffres. Ainsi, dans le cas le plus défavorable ,

$$\frac{a'-b'}{\alpha^{\frac{1}{p}-1}} < 1.$$

Dans la série entre la parenthèse, un terme se forme sur le précédent, en multipliant ce dernier par

$$\frac{(rp - 1) \frac{a'^{r-1} - b'^{r-1}}{a' - b'}}{(r-1)p \cdot \alpha \frac{a'^r - b'^r}{a' - b'}}.$$

Il sera démontré que les termes de la série vont en décroissant, si nous démontrons que ce multiplicateur est moindre que l'unité; et comme $\frac{rp-1}{(r+1)p}$ est moindre que l'unité, il suffira de prouver que

$$\frac{a'^{r+1} - b'^{r+1}}{a'^r - b'^r} < 1.$$

En effet, on a l'identité

$$\frac{a'^{r+1} - b'^{r+1}}{\alpha(a'^r - b'^r)} = \frac{a'}{\alpha} + \frac{b'}{\left\{ \left(\frac{a'}{b'}\right)^{r-1} + \left(\frac{a'}{b'}\right)^{r-2} + \dots + \frac{a'}{b'} + 1 \right\} \alpha}.$$

En appelant **T** le nombre entier immédiatement au-dessous de $\left(\frac{a'}{b'}\right)^{r-1} + \dots + 1$, il vient

$$\frac{a'^{r+1} - b'^{r+1}}{\alpha(a'^r - b'^r)} < \frac{a' + \frac{b'}{\mathbf{T}}}{\alpha}.$$

Le numérateur, dans le deuxième membre, a, au plus, $k+1$ chiffres. Le dénominateur en a $2k+1$; dans le cas le plus défavorable, le deuxième membre est moindre que l'unité; il en est de même, à fortiori, du premier. Donc le multiplicateur qui sert à passer d'un terme au suivant dans la série, est moindre que l'unité; par conséquent les termes de la série sont décroissants; de plus, ils sont alternativement positifs et négatifs, donc, d'après un théorème connu, la quantité entre parenthèses est moindre que son premier

terme 1. Donc la valeur de ${}_p \left[A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} \right]$ est le produit de deux quantités moindres que l'unité, et dès lors il est vrai de dire qu'on a :

$$A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{p}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$