V. DELACOUR

Théorème sur les transversales

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 444-446
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__444_1>

THÉORÈME SUR LES TRANSVERSALES.

PAR M. V. DELACOUR,
Elève au College royal Bourbon.

Par un point P (fig. 86), *on mène des droites* PA, PA', PA''... *qui coupent en* A, A', A'',... B, B', B'',... *les côtés d'un angle* AOB. *Si par le point* O, *on fait passer une droite* OL *quelconque, et dans l'espace même, qu'on prenne* $OC=OB$, $OC'=OB'$, $OC''=OB''$, etc. : *les lignes* AC, A'C', A''C'',... *passeront toutes au même point* I.

Je suppose qu'on ait mené seulement deux sécantes PA, PA', et que le point I ait été determine par l'intersection de AC, A'C'; si l'on considère une troisième sécante PA'', et qu'on fasse les constructions indiquées, les trois points A'',C'',I, seront en ligne droite.

Car le triangle AOB étant coupé par les deux transversales PA', PA'' elles déterminent chacune sur ses côtés, six segments qui sont tels que le produit de trois d'entre eux, non consécutifs, est égal au produit des trois autres. C'est-à-dire que

$$OA'.AP.BB' = AA'.BP.OB', \tag{1}$$

$$OA''.AP.BB'' = AA''.BP.OB''. \tag{2}$$

La division membre par membre de ces deux équations, donne

$$\frac{OA'.BB'}{OA''.BB''} = \frac{AA'.OB'}{AA''.OB''},$$

et puisque $BB' = CC'$, $BB'' = CC''$, $OB' = OC'$, $OB'' = OC''$, la relation précédente conduit à celle-ci :

$$\frac{OA'.CC'}{OA''.CC''} = \frac{AA'.OC'}{AA''.OC''} \quad \text{ou bien} \quad \frac{OA'.CC'}{AA'.OC'} = \frac{OA''.CC''}{AA''.OC''}.$$

Que l'on multiplie maintenant chaque membre par le rapport $\frac{AI}{IC}$, et on aura

$$(3) \qquad \frac{OA'\,AI.CC'}{AA'.IC.OC'} = \frac{OA''.AI.CC''}{AA''.IC.OC''}.$$

Mais dans le plan conduit par OA et OL, le triangle OAC étant coupé par la transversale IA', on a l'égalité

$$(4) \qquad OA'.AI.CC' = AA'.IC.OC',$$

qui, combinée avec la précédente, montre que

$$OA''.AI.CC'' = AA''.IC.OC'',$$

équation qui exprime que les trois points A'',C'',I sont tellement placés sur les côtés du triangle OAC, que le produit de trois distances (non consécutives) aux sommets est égal au produit des trois autres, donc ces trois points sont en ligne droite; donc A''C'' doit passer en I, et le théorème est démontré.

Remarque. La direction de OL étant arbitraire, on pourra lui donner une multitude de positions différentes, et tous les points I qui correspondent a ces droites, engendreront un lieu géométrique que je vais déterminer.

Je divise membre par membre les équations (1), (4), après avoir eu soin de remplacer dans cette dernière CC', par BB', et OC' par OB'. Il vient alors

$$\frac{AP}{AI} = \frac{BP}{CI}.$$

Donc PI est parallèle à BC. Il est aisé de reconnaître qu'en menant PQ parallèle à OB, les triangles PQI, BOC seront semblables. Car en considérant à la fois les égalités

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AI}{CI}, \quad \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{OQ},$$

on a $\frac{AI}{CI} = \frac{AQ}{OQ}$, d'où résulte le parallélisme de OC et QI. Ainsi, ces deux triangles ont les côtés parallèles, ce qui établit leur similitude; et puisque OB = OC, les côtés homologues de PIQ sont égaux : QI = QP. Partant, les points I sont tous sur une sphère ayant son centre en Q, et pour rayon QP, puisque QI est une grandeur constante.