NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VANNSON

Détermination des asymptotes, dans les courbes algébriques d'un degré quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 398-405

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__398_1>

DETERMINATION DES ASYMPTOTES

Dans les courbes algébriques d'un degré quelconque.

PAR M. VANNSON,

Professeur au collége royal de Versailles.

L'équation d'une asymptote étant représentée par $y = cx + d$, on a $c = \lim\left(\frac{y}{x}\right)$, $d = \lim(y - cx)$.

Soit $f(xy)$ l'ensemble des termes du m^e degré de l'équation proposée ; $F(xy)$, l'ensemble des termes du degré $m-1$; $\varphi(xy)$, celui des termes du degré $m-2$, etc. : l'équation proposée sera donc :

$$(A)\ldots\ldots f(xy) + F(xy) + \varphi(xy) + \text{etc.} = 0.$$

J'appelle y' le rapport variable de y à x ; j'ai ainsi $y = y'x$, et l'équation (A) peut s'écrire comme il suit :

$$(B)\ldots\ldots x^m f(1,y') + x^{m-1}F(1,y') + x^{m-2}\varphi(1,y') + \text{etc.} = 0,$$

ou, pour toute valeur de x autre que zéro,

$$f(1,y') + \frac{1}{x}F(1,y') + \frac{1}{x^2}\varphi(1,y') + \text{etc.} = 0.$$

Si x tend vers l'infini, le premier membre de cette équation tendra vers la limite $f(1,y')$. Posons donc $f(1,y') = 0$, et supposons qu'on ait tiré de cette équation une valeur finie de y', soit $y' = c$, alors $f(1,y') = (y' - c).Q(y')$.

L'équation (B) peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$x^m(y'-c)\,Q(y') + x^{m-1}F(1,y') + x^{m-2}\varphi(1,y') + \ldots\ldots = 0;$$

ou, en divisant par le facteur x^{m-1} qui n'est pas supposé nul :

$$(y'x - cx)\,Q(y') + F(1,y') + \frac{1}{x}\varphi(1,y') + \ldots\ldots = 0.$$

Mais $y'x = y$, on a donc

$$y - cx = -\frac{F(1,y')}{Q(y')} - \frac{1}{x}\frac{\varphi(1,y')}{Q(y')} - \ldots\ldots,$$

si x tend vers l'infini, y' tend vers sa limite c, on a donc

$$\lim(y - cx) \text{ ou } d = -\frac{F(1,c)}{Q(c)}.$$

Mais $Q(c)$ est, comme on le voit dans les éléments d'algèbre, la dérivée de $f(1,y')$ par rapport à y' ; dérivée dans laquelle y' est remplacé par c ; ou bien c'est la dérivée de $f(yx)$ prise par rapport à y, dans laquelle on aurait remplacé x par 1 et y par c. On a donc enfin $d = -\dfrac{F(1,c)}{f'(1,c)}$.

De là résulte, pour la détermination des asymptotes, cette règle générale · *Prenez l'ensemble des termes du plus haut degré de votre équation; remplacez* x *par l'unité, résolvez l'équation qui en résulte par rapport à* y. *Ayant trouvé une racine*, c, *finie et réelle pour* y, *divisez l'ensemble des termes du degré* (m — 1) *par la dérivée des termes précédents, prise par rapport à* y ; *changez le signe du quotient, puis remplacez dans ce quotient* y *par* c *et* x *par* 1 ; *si le résultat est fini, vous aurez le terme indépendant de* x *et* y *dans l'équation d'une asymptote, ayant* c *pour coefficient de* x.

Ainsi, l'équation d'une asymptote quelconque non parallèle aux y sera donnée par la formule : $y = cx - \dfrac{F(1,c)}{f'(1,c)}$,

c étant une quelconque des racines réelles et finies de l'équation $f(1,y')=0$.

Appliquons cette règle à l'équation

$$y^3+xy^2-2x^2y+y^2-3xy+y+x=0.$$

Ici $f(1,y)=0$ sera $y^3+y^2-2y=0$, ayant pour racines 0, 1 et -2. D'où $d=0$, $d'=\frac{2}{3}$; $d''=-\frac{5}{3}$. Les asymptotes sont donc 1° l'axe des x, 2° la droite ayant pour équation $y=x+\frac{2}{3}$, et enfin $y=-2x-\frac{5}{3}$.

Discussion. Si les termes du degré $m-1$ manquent dans l'équation, d est nul, et l'asymptote pour laquelle on a trouvé c, passe par l'origine. Si $f'(1,c)=0$, d est infini, et il n'y a pas d'asymptote ayant pour coefficient de x la valeur trouvée pour c.

Si on a en même temps $f'(1,c)=0$ et $F(1,c)=0$, d se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Dans ce cas, $f(1,y')$ est divisible par $(y'-c)^2$; j'appelle $Q(y')$ le quotient de ces deux expressions; d'ailleurs $F(1,y')$ est divisible par $y'-c$, j'appelle $Q'(y')$ le quotient; l'équation B pourra donc s'écrire ainsi :

$$x^{m-2}(y-cx)^2Q(y')+x^{m-2}(y-cx)Q'(y')+x^{m-2}\varphi(1,c)+\text{etc.}=0.$$

En divisant par x^{m-2}..... et faisant ensuite x infini, d'où $y'=c$ et $y-cx=d$..... nous aurons

$$d^2.\,Q(c)+d.Q'(c)+\varphi(1,c)=0.$$

Mais $Q'(c)=f'(1,c)$, c'est-à-dire la dérivée du 2^e groupe de termes, prise par rapport à y, dans laquelle y est remplacé par c, et x par 1; et $Q(c)$ n'est autre chose que la moitié de la dérivée du 2^e ordre pour le premier groupe, dans laquelle on fait les mêmes substitutions, on a donc enfin

$$\frac{1}{2}d^2f''(1,c)+dF'(1,c)+\varphi(1,c)=0;$$

équation qui donnera pour d soit deux valeurs réelles et inégales, ou deux valeurs égales, ou enfin des expressions imaginaires Dans le 1[er] cas, on aura deux asymptotes parallèles à la droite $y = cx$, etc.

Si on a en même temps $f''(1,c)=0$, $f'(1,c)=0$, $\varphi(1,c)=0$, d dépendra de l'équation du 3[e] degré suivante :

$$\frac{1}{2 \cdot 3} d^3 f'''(1,c) + \frac{1}{2} d^2 F''(1,c) + d\varphi'(1,c) + \psi(1,c) = 0.$$

Cette équation aura au moins une racine réelle ; l'examen des divers cas qu'elle peut offrir ne présente aucune difficulté.

Dans ce qui précède, c est supposé fini ; on ne trouve donc pas les asymptotes qui seraient parallèles aux y et ayant pour équation $x = \delta$. Pour les obtenir, on posera $x = yx'$, et raisonnant comme ci-dessus, on aura l'équation $f(x',1)=0$. Si cette équation n'admet pas de racine nulle, il sera inutile d'aller plus loin Si elle admet la racine 0, on trouvera δ par la formule

$$\delta = -\frac{F(0,1)}{f'(0,1)},$$

0 remplaçant x, et 1 remplaçant y, et la dérivée qui se trouve au dénominateur étant prise par rapport à x. Si l'on trouve $\delta = \frac{0}{0}$, on aura recours à l'équation

$$\frac{1}{2} \delta^2 f''(0,1) + \delta F'(0,1) + \varphi(0,1) = 0, \text{ etc.}$$

Remarque. Pour qu'une des lignes trouvées par la méthode indiquée soit réellement asymptote de la courbe, il faut encore que l'expression de l'ordonnée y ne devienne pas imaginaire quand x tend vers l'infini ; circonstance qui n'empêche pas toujours les coefficients c et d de se présenter sous forme réelle.

Exemple. — Soit la courbe représentée par l'équation

$$x^4 y^2 - 6 y x^5 + 9 x^6 - 4 x^4 y + 12 x^5 + 4 x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

Ici l'équation $f(1,y')=0$ donne $y'^2-6y'+9=0$; d'où $y'=3$, ou $c=3$. Si on applique la formule $d=-\frac{F(1,c)}{f'(1,c)}$, on trouve $\frac{0}{0}$. Appliquant alors la formule qui donne en général deux valeurs de d, savoir :

$$\frac{1}{2}d^2f''(1,c)+dF'(1,c)+\varphi(1,c)=0,$$

on trouve $\quad d^2-4d+4=0 \quad$ ou $\quad d=2.$

On pourrait donc croire que la droite ayant pour equation $y=3x+2$ est une asymptote ; mais si on tire la valeur de y de l'équation de la courbe, on trouve

$$y=3x+2\pm\frac{1}{x^2}\sqrt{1-x^2},$$

expression qui est imaginaire pour $x>1$; donc la droite $y=3x+2$ n'est pas asymptote de la courbe.

Cherchons si la même courbe n'aurait pas une asymptote parallèle aux y, en appliquant la méthode générale. Pour cela, prenons le 1^er^ groupe de termes, et remplaçons y par l'unité. Nous aurons $9x^6-6x^5+x^4=0$. $x=0$ vérifie cette équation.

La formule $\delta=-\frac{F(0,1)}{f'(0,1)}$ donne $\frac{0}{0}$, il faut recourir à l'équation $\frac{1}{2}\delta^2f''(0,1)+\delta F'(0,1)+\varphi(0,1)=0$, dans laquelle tout devient nul pour $x=0$; il en est de même pour l'équation $\frac{1}{6}\delta^3f'''(0,1)+$ etc. et l'équation suivante, savoir :

$$\frac{1}{24}\delta^4f_4(0,1)+\frac{1}{6}\delta^3F_3(0,1)+\frac{1}{2}\delta^2\varphi''(0,1)+\delta\psi'(0,1)+\chi(0,1)=0$$

donne avant de faire $x=0$; $\delta^4-46x\delta^3+24x^2\delta^2+x^2=0$; d'où $\delta=0$ quand x est remplacé par 0 ; ainsi l'axe des y est asymptote de la courbe. Ce qui se voit beaucoup plus simplement par l'inspection de la valeur tirée pour y ; mais il était bon de faire application de nos formules générales à ce cas particulier.

Nous terminerons par une remarque à laquelle donne lieu l'application de la méthode générale aux courbes du 2^e degré. Dans ce cas particulier, $f(1,y)=0$ donne $Ay^2+By+C=0$, d'où $y=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$, résultat réel, si B^2-4AC est positif ou nul. Examinons la seconde hypothèse.

Pour avoir d nous employons la formule

$$d=-\frac{F(1,c)}{f'(1,c)}=-\frac{Dc+E}{2Ac+B}=-\frac{BD-2AE}{4AC-B^2},$$

quantité infinie en général ; ce qui prouve que la parabole n'a pas d'asymptot e. Mais si on a $BD-2AE=0$, alors d se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; on doit donc recourir à l'équation

$$\frac{1}{2}d^2f''(1,c)+dF'(1,c)+\varphi(1,c)=0, \text{ qui donne}$$

$$Ad^2+dD+F=0,\quad \text{d'où}\quad d=\pm\frac{\sqrt{D^2-4AF}-D}{2A},$$

expression réelle, si D^2-4AF est positif ou nul. Si donc on opérait sur une courbe dont la discussion n'eût pas déjà été faite, on pourrait croire qu'elle a deux asymptotes ayant pour équations :

$$(C)\ldots\ldots\; y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{D^2-4AF}\,;$$

mais, dans le cas actuel, l'équation donnée représente deux lignes droites. Ce sont ces mêmes droites qu'on trouve et qu'on doit trouver en cherchant les asymptotes.

En général, quand l'équation donnée sera divisible par un facteur de la forme $ay+bx+c$; la droite $ay+bx+c=0$ se trouvera en cherchant les asymptotes. Donc, quand on appliquera la méthode des asymptotes à une courbe d'un degré supérieur, sans savoir si elle admet ou non des diviseurs linéaires ; avant d'affirmer qu'une des droites trouvées est réellement une asymptote, il faudra essayer de diviser le premier membre de l'équation donnée par le premier membre de l'équation de la droite ramenée à la forme $ay + bx + c = 0$; si cette division ne peut se faire, et si, d'ailleurs, y ne devient pas imaginaire par $x = \infty$ ou réciproquement, on sera certain d'avoir obtenu une asymptote. Nous trouvons un exemple de cette circonstance dans l'équation

$$y^4 - xy^3 + x^3y - x^4 - y^3 - x^3 - y + x + 1 = 0.$$

L'équation $f(1, y) = 0$, donne $y^4 - y^3 + y - 1 = 0$. Cette équation a pour racines réelles ± 1, prenons $+1$, le d correspondant sera donné par l'équation $d = -\dfrac{F(1, c)}{f'(1, c)} = 1$, ce qui donne la droite $y = x + 1$; pour l'autre droite, on trouve $y = -x$; si nous divisons le premier membre de notre équation par le facteur correspondant à la dernière droite, nous n'obtenons par un quotient exact ; en sorte que la dernière droite est bien une asymptote ; mais la division du même polynôme par $y - x - 1$ donne un quotient exact $y^3 + x^3 - 1 = 0$; ce qui nous avertit que notre équation représente une ligne droite et une courbe ayant pour équation $x^3 + y^3 - 1 = 0$, laquelle a pour asymptote la droite dont l'équation est $y + x = 0$. Cette méthode peut être avantageuse dans certains cas pour reconnaître si une équation d'un degré quelconque admet ou non des diviseurs linéaires.

Il y a dans cet article une observation que nous recommanderons surtout à l'attention des élèves ; nous voulons parler de la *Remarque* (page 401). Elle est sans doute très-utile si, comme nous avons eu l'occasion de le reconnaître, quelques personnes ont conclu de la théorie des asymptotes, exposée dans les Traités élémentaires, que les droites obtenues par les *règles générales* prescrites dans ces ouvrages, sont toujours asymptotes à la courbe considérée. L'inexactitude d'une semblable conclusion a été mise en évidence, par l'exemple que M. *Vannson* a donné (page 401). Et d'ailleurs, une analyse exacte des raisonnements que l'on fait pour établir les règles générales dont il s'agit, montre qu'elles peuvent donner des valeurs *réelles* et *finies* aux coefficients qui déterminent les droites cherchées, non-seulement lorsque l'équation sur laquelle on opère, représente une courbe limitée, mais encore lorsque cette équation ne représente aucune ligne réelle. Il semble donc qu'il serait convenable d'exposer d'abord les conditions en vertu desquelles une équation algébrique d'un degré quelconque, peut représenter une courbe à branches infinies. Et c'est effectivement, par la recherche de ces conditions qu'*Euler* commence la théorie des asymptotes dans l'*Introduction à l'analyse infinitésimale*. (Voyez le chapitre intitulé : *de la recherche des branches infinies*.) Il démontre d'abord que la courbe est nécessairement limitée, lorsque les termes du plus haut degré de son équation forment un polynôme qui n'admet aucun facteur réel du premier degré. Ainsi, l'équation proposée ne peut représenter une courbe à branches infinies, lorsque prenant pour inconnue le rapport $\frac{y}{x}$ de l'ordonnée à l'abscisse, l'équation formée en égalant à zéro les termes du plus haut degré n'a aucune racine réelle. Si cette dernière équation admet des racines réelles et inégales, la ligne s'étend à l'infini. Enfin, le cas particulier des racines réelles et égales a aussi été discuté par *Euler*. C'est précisément à ce cas particulier que se rapporte l'exemple donné par M. *Vannson*, puisque le premier membre de l'équation $y'^2-6y'+9=0$ (page 402), est un carré.

Au reste, nous reviendrons bientôt sur ce sujet. G.