TERQUEM

Briève et nouvelle démonstration du théorème de Newton sur le quadrilatère circonscrit à une conique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 378-379

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__378_1>

BRIÈVE ET NOUVELLE DÉMONSTRATION

Du théorème de Newton sur le quadrilatère circonscrit à une conique. (Voy. p. 110.)

—

THÉORÈME. Le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère est une droite.

Démonstration. Soit $dy+ex+f=0$, l'équation d'un des côtés du quadrilatère ; puisque ce côté est une tangente, on a l'équation

$$\frac{l'}{m}d^2-2de\frac{n}{m}+\frac{l}{m}e^2+f^2+2fd\frac{k'}{m}+2ef\frac{k}{m}=0, \text{ (p. 108)},$$

faisons $x=\frac{k}{m}$, $y=\frac{k'}{m}$, $\frac{n}{m}=z$; les quatre côtés fournissent quatre équations semblables du premier degré entre les cinq quantités $x, y, z, \frac{l}{m}, \frac{l'}{m}$; considérant z comme une quantité connue, on tire de ces quatre équations, à l'aide des formules de *Cramer*, $x = pz + q$, $y = p'z + q'$; p, q, p', q', sont des fonctions connues des coefficients d, e, f, d', e', f', etc.; éliminant z, on a $\frac{x - q}{p} = \frac{y - q'}{p'}$; équation d'une droite, où x et y sont les coordonnées du centre, donc etc.

Remarque. Le même genre de raisonnements peut s'appliquer aux rapports $\frac{l}{k}$, $\frac{l'}{k}$; ce qui fait connaître une nouvelle propriété.

Les trois diagonales du quadrilatère complet peuvent être considérées comme trois ellipses ou hyperboles aplaties, remplissant les conditions du problème, et les milieux de ces droites sont des centres; donc la droite des centres passe par les milieux des diagonales. Tm.