NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AIMÉ RISPAL

Lieu des sommets d'une hyperbole et d'une ellipse, l'une ayant une asymptote et un foyer fixes, et l'autre un des diamètres conjugués égaux et un foyer fixes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 357-362

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__357_1>

LIEU DES SOMMETS

D'UNE HYPERBOLE ET D'UNE ELLIPSE,

l'une ayant une asymptote et un foyer fixes, et l'autre un des diamètres conjugués égaux et un foyer fixes (*).

PAR M. AIMÉ RISPAL,
Élève du Collége de Rouen.

—

I. *Fig.* 56. Trouver le lieu des sommets d'une hyperbole ayant une asymptote et un foyer fixes. Soit F le foyer donné, et OY l'asymptote que je prends pour axe des y, et pour axe des x, la perpendiculaire OX. Le centre de la courbe est situé sur OY. Soit C ce centre dans une de ses positions, CF sera l'axe de la courbe; or, si je fais $CA=CO$, le point A est le sommet, car on sait que les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes ont pour lieu le cercle décrit du point C avec l'axe transverse pour rayon, et l'asymptote est une tangente dont le point de contact est à l'infini. Prenons OF pour unité. Soit $CO = CA = \alpha$, l'équation de CF sera

$$y + \alpha x = \alpha \qquad (1)$$

(*) La première partie a déjà été traitée, tome I, p 158.

La similitude des deux triangles CQA, PAF donne

$$x : 1-x :: \alpha : \sqrt{y^2+(1-x)^2},$$

d'où l'on tire

$$\alpha^2 = \frac{x^2y^2+x^2(1-x)^2}{(1-x)^2}, \tag{2}$$

et en éliminant α entre les équations (1) et (2) on a évidemment le lieu cherché

$$y^2 = \frac{x^2(1-x)}{1+x}$$

On aurait pu suivre une autre marche et partir de l'équation aux foyers. Elle est ici

$$y^2+(x-1)^2-(my+nx+p)^2=0,$$

ou en développant et ordonnant

$$(1-m^2)y^2-(2mnx+2mp)y+(1-n^2)x^2-(2np+2)x+1-p^2=0.$$

La condition d'asymptotisme de l'axe des y donne pour $x=0$

$$1-m^2=0, \quad 2mp=0,$$

d'où

$$(1) \qquad m^2=1, \quad p=0.$$

L'équation de la courbe devient ainsi

$$(2) \qquad (1-n^2)\,x^2-2mn\,xy-2x+1=0\,;$$

l'equation de l'axe est

$$(3) \qquad y=\frac{m}{n}(x-1)$$

or il suffit d'éliminer m et n entre les trois equations (1), (2) et (3).

De l'équation (3) on tire $n^2y^2=x^2-2x+1$ en la combinant avec l'équation (1). Si on substitue cette dernière valeur ainsi que celle $m=\dfrac{ny}{x-1}$ dans l'équation (2) on en tire, toute réduction faite,

$$y^2=\frac{x^2(1-x)}{1+x}$$

Passons maintenant à la construction de la courbe ; on tire de l'équation

$$y = \pm x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (\textit{fig. } 57);$$

Ce lieu passe à l'origine et au point F, car pour $x=0$ et $x=1$, on a $y=0$. De plus, comme $x=-1$ donne $y=\infty$, on a une asymptote LL' parallèle à l'axe des y, à une distance de l'origine $OK=1$. La courbe est d'ailleurs entièrement comprise entre les droites LL' et BC, car on ne saurait avoir $x>1$ ni >-1. Quand on fait $x=1$, on trouve pour y deux valeurs nulles, donc il doit exister en F une ligne BC parallèle à l'axe des y et tangente à la courbe. Il est, d'après cette discussion, plus que probable que la courbe aura la forme indiquée par la figure. Pour nous en en assurer, formons la dérivée

$$y' = \pm \frac{1-x-x^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}.$$

Pour $x=1$, $y'=\infty$, donc en effet, comme nous l'avions annoncé, il existe une tangente BC parallèle à l'axe de y. Si l'on fait $x=0$ on trouve $y'=\pm 1$, donc les deux bissectrices des angles des axes sont des tangentes à la courbe.

Pour achever de déterminer complétement la forme de la courbure, il faut chercher le point le plus élevé au-dessus de l'axe des x. On le trouvera en posant

$$1-2x-x^2=0,$$

ce qui donne $x=-1\pm\sqrt{2}$. La valeur négative doit être rejetée comme >1, donc l'abscisse du maximum cherché est $x=-1+\sqrt{2}$, et comme $OF=BF=1$, $OB=\sqrt{2}$. Si donc je prends $BD=BF$, j'aurai $OD=-1+\sqrt{2}$, et en rabattant ce point en D', j'ai le point cherche.

Je dis maintenant que les deux branches OH et OH' sont les lieux des seconds sommets. Menons une droite passant par le point F et dans une direction quelconque FG. Il suffit de démontrer que GP $=$ GP$'$. Soit $y=m(x-1)$ l'équation de cette droite ; en la combinant avec celle de la courbe, on a

$$m^2(x-1)^2 = -\frac{x^2(x-1)}{1+x}.$$

et supprimant le facteur commun $x-1$,

$$m^2(x^2-1) = -x^2,$$

d'où

$$x = \frac{m}{\pm\sqrt{m^2+1}},$$

donc les deux abscisses des points P et P$'$ sont égales, aux signes près. Par conséquent aussi PG$=$P$'$G. Il est clair encore d'après cela que l'asymptote LL$'$ est le lieu des seconds foyers, car GF $=$ GF$'$.

II. Proposons-nous maintenant de construire la courbe représentée par l'équation

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}};$$

je remarque d'abord que cette équation est satisfaite pour $x=1$, $y=0$; donc la nouvelle courbe passe encore en F, et elle est aussi tangente à BC. On ne saurait admettre l'hypothèse $x=0$, car alors la valeur de y est imaginaire nulle (*) Comme $x=-1$ donne $y=\infty$, on en conclut que la courbe a encore pour asymptote LL$'$; du reste, aucun point de cette courbe imaginaire n'est compris entre les deux parallèles LL$'$ et BC, car x ne saurait être <-1 ni <1. On peut s'assurer par des substitutions directes qu'à partir de $x=1$ la valeur de y croît sans cesse, mais peu rapidement ; il est donc probable que dans cette partie la courbe est concave vers l'axe

(*) C'est une erreur, car $0\sqrt{-1}=0$, de même que $\infty\sqrt{-1}=\infty$. Ainsi l'origine est un point isolé. Tm.

des x; on peut d'ailleurs s'en assurer directement en formant la dérivée du second membre

$$y' = \pm \frac{x^2 + x - 1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}$$

tant qu'on donne à x des valeurs >1 il est facile de voir que la fraction est toujours positive; si l'on prend le signe $+$ pour la branche supérieure, on voit alors que la concavité est tournée vers l'axe des x ; réciproquement si on prend le signe $-$ pour la branche inférieure, on trouve le même résultat : de plus, comme $x = 1$ donne $y' = \infty$, il s'ensuit que la courbe est tangente à la droite BC au point F comme nous l'avions annoncé. D'ailleurs, pour les branches aux abscisses négatives l'asymptotisme indique assez que la convexité est tournée vers l'axe. De plus, il n'existe qu'un point de maximum, car de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, on tire

$$x' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad x'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

la première valeur qui est positive doit être rejetée comme étant <1, la deuxième seule est convenable, car elle est >-1. De plus, on peut voir que la courbe a deux asymptotes dont les équations sont $y = x - 1$, $y = -x + 1$. Construisant ces droites, on obtient les deux asymptotes FM, FM′, et j'ai ainsi pour cette courbe, les trois branches VFV′, UI et U′I′. Je dis maintenant que si l'on mène une sécante ZFG′Z′ on aura ZF $= Z'\varphi$; en effet, l'équation de cette sécante est $y = \alpha(x - 1)$; substituant cette valeur dans l'équation de la courbe, on en tire

$$\alpha^2 (x -)^2\, 1 = \frac{x^2 (x - 1)}{x + 1},$$

d'où

$$\alpha^2 (x^2 - 1) = x^2 \quad \text{et} \quad x = \frac{\alpha}{\pm\sqrt{\alpha^2 - 1}}.$$

Donc, puisque les abscisses des points Z et Z' sont égales, aux signes près, on aura $ZG' = Z'G'$; mais $FG' = \varphi G'$ donne $Z'\varphi = ZF$.

Cette seconde courbe se rapporte à une ellipse, dont l'un des diamètres conjugués égaux est donné de position, ainsi qu'un foyer; c'est ce que montre un calcul direct et c'est aussi ce qn'on pouvait conjecturer d'après l'analogie qui existe entre les asymptotes dans l'hyperbole et les diamètres conjugués égaux dans l'ellipse. Il faut se rappeler que dans ce cas $OF = \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}$; a, b étant les axes principaux et c l'excentricité.