

HUET

**Questions d'examen. Volumes engendrés
par les polygones réguliers lorsqu'ils
tournent autour d'un de leurs côtés**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 353-357

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__353_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS D'EXAMEN.

*Volumes engendrés par les polygones réguliers lorsqu'ils
tournent autour d'un de leurs côtés.*

PAR M. HUET,

Regent de physique au collège de Pamiers, ancien professeur de mathématiques
spéciales à l'école de Sorrèze.

Lorsqu'un polygone régulier tourne autour d'un de ses

côtés, on peut se proposer de déterminer en fonction de son côté c le volume qu'il engendre.

Nous résoudrons cette question pour les polygones réguliers les plus simples : le triangle, le carré, le pentagone, l'hexagone, l'octogone, le décagone, le dodécagone.

Deux méthodes se présentent naturellement. La première consiste à calculer le volume d'après le théorème de Guldin, et la seconde à décomposer le volume engendré en plusieurs autres dont la géométrie élémentaire donne l'expression. Nous emploierons d'abord la seconde, et la première nous fournira ensuite une vérification pour les résultats.

Désignons par c le côté du polygone, par R le rayon du cercle circonscrit à ce polygone, et par r l'apothème.

1^o Triangle.

On a évidemment

$$\text{vol T} = \frac{1}{3} \text{AB} \cdot \overline{\text{CD}}^2 = \frac{1}{3} c \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} c^2 = \frac{1}{4} \pi c^3 \text{ (fig. 73)}$$

2^o Carré.

Ici, sans aucun calcul, on trouve $\text{vol C} = \pi c^2$

3^o Pentagone (fig. 74).

Menons sur AB les perpendiculaires DG et CI; joignons CE, EB et DB. On a évidemment $\text{vol P} = 2 \text{vol DCBG}$. Or $\text{vol DCBG} = \text{vol DCIG} - \text{vol BIC}$.

Soit D la diagonale $\text{DB} = \text{EC} = \text{EB}$. Le quadrilatère inscrit BCDE donne $\text{BD} \cdot \text{EC} = \text{BC} \cdot \text{DE} + \text{CD} \cdot \text{BE}$, ou $\text{D}' = c^2 + c \cdot \text{D}$,

$$\text{d'où } \text{D}^2 - c\text{D} = c^2, \text{ d'où } \text{D} = \frac{1}{2} c (1 + \sqrt{5}).$$

$$\text{DG}' = \overline{\text{BD}}^2 - \overline{\text{BG}}^2 = \text{D}' - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4} (5 + 2\sqrt{5}).$$

$$\text{GI} = \text{FC} = \frac{\text{D}}{2} = \frac{c}{4} (1 + \sqrt{5}); \text{BI} = \text{GI} - \text{BG} = \frac{c}{4} (\sqrt{5} - 1)$$

$$\overline{\text{CI}}^2 = \overline{\text{CB}}^2 - \overline{\text{BI}}^2 = c^2 - \frac{c^2}{16} (6 - 2\sqrt{5}) = \frac{c^2}{8} (5 + \sqrt{5}).$$

$$\begin{aligned} \text{Cela posé, vol DCIG} &= \frac{1}{3} \text{GI} \cdot \pi (\overline{\text{DG}}^2 + \overline{\text{CI}}^2 + \text{DG} \cdot \text{CI}) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} c \cdot \pi (1 + \sqrt{5}) \left\{ \frac{c^2}{4} (5 + 2\sqrt{5}) + \frac{c^2}{8} (5 + \sqrt{5}) + \right. \\ &+ \left. \frac{c^2}{8} \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})} \right\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \pi c^3 (1 + \sqrt{5}) \\ &\left\{ 15 + 5\sqrt{5} + \sqrt{70 + 30\sqrt{5}} \right\} \text{ en simplifiant le radical} \end{aligned}$$

$\sqrt{70 + 30\sqrt{5}}$ d'après une formule connue, on a

$$\begin{aligned} \text{vol DCIG} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \pi c^3 (1 + \sqrt{5}) \left\{ 15 + 5\sqrt{5} + 5 + 3\sqrt{5} \right\} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \pi c^3 (1 + \sqrt{5}) (5 + 2\sqrt{5}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \pi c^3 (15 + 7\sqrt{5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{vol BCI} &= \frac{1}{3} \text{BI} \cdot \pi \overline{\text{CI}}^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} c (\sqrt{5} - 1) \pi \frac{c^2}{8} (5 + \sqrt{5}) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \pi c^3 \sqrt{5}, \end{aligned}$$

donc

$$\text{vol DCBG} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \pi c^3 (15 + 6\sqrt{5}) = \frac{1}{8} \pi c^3 (5 + 2\sqrt{5});$$

$$\text{donc enfin} \quad \text{vol P} = \frac{1}{4} \pi c^3 (5 + 2\sqrt{5}).$$

4° Hexagone (fig. 75).

Menons les droites AE, BD, FC; abaissons CI perpendiculaire sur AB, et représentons par H l'hexagone, par R le rectangle ABDE, par T le trapèze DCIB, par t le triangle DCB, et par t' le triangle BCI. On a évidemment

$$\text{vol H} = \text{vol R} + 2 \text{vol } t = \text{vol R} + 2 (\text{vol T} - \text{vol } t').$$

$$\text{Or} \quad \text{vol R} = \text{AB} \cdot \pi \overline{\text{AE}}^2 = c \pi \cdot 3c^2 = 3\pi c^3$$

$$\begin{aligned}\text{vol } t &= \text{vol } T - \text{vol } t' = \frac{1}{3} \text{BI} (\overline{\text{BD}}^2 + \overline{\text{CI}}^2 + \text{BD} \cdot \text{CI} - \overline{\text{CI}}^2) \pi = \\ &= \frac{1}{3} \text{BI} \cdot \text{BD} (\text{BD} + \text{CI}) \pi = \frac{1}{3} \pi \text{BI} \cdot 2\text{CI} \cdot 3\text{CI} = 2\pi \text{BI} \cdot \overline{\text{CI}}^2 = \\ &= c \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} c^2 = \frac{3}{4} \pi c^3;\end{aligned}$$

donc $2 \text{vol } t = \frac{3}{2} \pi c^3;$

et partant $\text{vol } H = 3\pi c^3 + \frac{3}{2} \pi c^3 = \frac{9}{2} \pi c^3.$

5° *Octogone* (fig. 76).

$$\text{vol } O = \text{vol } ABEF + 2 \text{vol } EDCB = \text{vol } R + 2 \text{vol } K.$$

Or $\text{vol } K = \text{vol } EDIB - \text{vol } BIC = \text{vol } T - \text{vol } T'.$

On a d'ailleurs

$$qm = bB = bC = \frac{1}{2} c \sqrt{2}; \text{BE} = mn = 2om = 2(oq + qm) =$$

$$2\left(\frac{c}{2} + \frac{c}{2} \sqrt{2}\right) = c(1 + \sqrt{2}); \text{BI} = \frac{1}{2} c \sqrt{2};$$

$$\text{DI} = \text{DC} + \text{CI} = c + \frac{c}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{2} c(2 + \sqrt{2});$$

cela posé, on a

$$\text{vol } R = \text{AB} \cdot \pi \overline{\text{BE}}^2 = c \cdot \pi \cdot c^2 (1 + \sqrt{2})^2 = \pi c^3 (3 + 2\sqrt{2});$$

$$\begin{aligned}\text{vol } K &= \text{vol } T - \text{vol } T' = \frac{1}{3} \pi \text{BI} (\overline{\text{BE}}^2 + \overline{\text{DI}}^2 + \text{BE} \cdot \text{DI} - \overline{\text{CI}}^2) = \\ &= \frac{1}{3} \text{BI} \cdot \text{BE} \cdot \pi (\text{BE} + \text{DI} + c), \text{ en observant que}\end{aligned}$$

$$\overline{\text{DI}}^2 - \overline{\text{CI}}^2 = (\text{DI} + \text{CI})(\text{DI} - \text{CI}) = \text{BE} \cdot c.$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi donc } \text{vol } K &= \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{c}{2} \sqrt{2} (1 + \sqrt{2}) \left(3c + \frac{3c}{2} \sqrt{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \pi c^3 \sqrt{2} (1 + \sqrt{2}) \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}\right) =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \pi c^3 (2 + \sqrt{2}) (1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}) = \frac{1}{2} \pi c^3 (3 + 2 \sqrt{2}).$$

Donc $2 \text{vol K} = \pi c^3 (3 + 2 \sqrt{2}) = \text{vol R}$, résultat remarquable.

$$\text{Donc } \text{vol O} = 2 \pi c^3 (3 + 2 \sqrt{2}).$$

(*La suite prochainement.*)