NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relations d'identité et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 300-306

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__300_1>

RELATIONS D'IDENTITÉ

Et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(Suite, voir p. 106.)

Théorie analytique des pôles et polaires; proportions et progressions harmoniques.

XXV. *Définition* 1. La *distance réciproque* de deux points, c'est l'unité divisée par la distance des deux points.

Définition 2. La moyenne *distance réciproque* de plusieurs points en ligne droite à un point fixe sur la même droite, c'est la somme algébrique des distances réciproques divisée par le nombre des points.

Définition 3. Le point de *moyenne distance réciproque*, relativement à un système de points en ligne droite est un point tel que sa distance réciproque est égale à la moyenne distance réciproque du système des points.

XXVI. Théorème. Supposons qu'un nombre quelconque de points se succèdent en ligne droite, et pour fixer les idées ne prenons d'abord que quatre points A, B, C, E. Les distances réciproques des trois derniers points au premier A, considéré comme point fixe, sont $\frac{1}{BA}$, $\frac{1}{CA}$, $\frac{1}{EA}$; prenons sur la même droite le point D de moyenne distance réciproque ; de sorte que d'après la définition 3[e] l'on ait $\frac{1}{BA}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{EA}=\frac{3}{DA}$ (a); si l'on projette *coniquement* le point fixe A et les quatre autres points B, C, D, E, sur une autre droite, la projection D′ du point de moyenne distance D sera le point de moyenne distance des points projetés B′, C′, E′, relativement à A′ projection de A.

Démonstration. Soit O le point de départ des lignes projetantes OAA′, OBB′, OCC′ etc. ; faisons $OA=r$, $OB=r'$, $OC=r''$, $OD=r'''$, $OE=r^{\text{IV}}$; $BA=b$, $CA=c$, $DA=d$, $EA=e$; et soit h la perpendiculaire abaissée de O sur la droite AE ; on aura évidemment les égalités, $bh=rr'\sin(r,r')$, $ch=rr''\sin(r,r'')$, $dh=rr'''\sin(r,r''')$, $eh=rr^{\text{IV}}\sin(r,r^{\text{IV}})$; l'équation (a) devient $cde+bde+bcd=3bce$

$$\text{ou}\qquad ce(d-b)+be(d-c)+bc(d-e)=0. \qquad (b)$$

Or $h(d-b)=r'r'''\sin(r',r''')$, $h(d-c)=r''r'''\sin(r'',r''')$, $h(d-e)=r'''r^{\text{IV}}\sin(r''',r^{\text{IV}})$; substituant ces valeurs et celles de b, c, e dans l'équation (b), les six lignes $r, r', r'', r''', r^{\text{IV}}$, h disparaissent et l'on a cette équation entre les sinus :

$$\sin(r,r'')\sin(r,r^{\text{IV}})\sin(r',r''')+\sin(r,r')\sin(r,r^{\text{IV}})\sin(r'',r''')$$
$$=\sin(r,r')\sin(r,r'')\sin(r''',r^{\text{IV}}). \qquad (c)$$

La même relation (c) subsistera donc pour la droite A′B′C′D′E′, or, en rétablissant les facteurs on peut, en suivant une marche inverse, revenir de l'équation (c) d'abord à l'équation (b), et ensuite à l'équation (a), donc, etc. La même démonstration subsiste quel que soit le nombre des points. Donc le théorème est démontré généralement.

Observation 1. Lorsque le point O est situé à l'infini, les projections deviennent *cylindriques* et le théorème est d'une évidence intuitive.

Observation 2. Lorsque le point fixe A s'éloigne à l'infini, les distances b, c, d, e deviennent égales et infinies, mais les différences $d-b$, $d-c$, $d-e$ restent finies et l'équation (b) se change en celle-ci $\mathrm{BD}+\mathrm{CD}-\mathrm{DE}=0$; le point D est donc alors le point de moyenne distance directe des points B, C, E. Le point de moyenne distance inverse est dans ce cas le même que le point de distance directe.

Observation 3. Soit toujours A le point fixe ; B et D deux autres points, et C leur point de moyenne distance réciproque, de sorte que les équations (a) et (b) deviennent $\frac{2}{\mathrm{AC}}=\frac{1}{\mathrm{AB}}+\frac{1}{\mathrm{AD}}$ et $\mathrm{AB}.\mathrm{CD}=\mathrm{AD}.\mathrm{BC}$; c'est-à-dire le segment moyen BC multiplié par la droite entière AD est égal au produit des deux segments extrêmes AB et CD : ainsi la droite AD est divisée *harmoniquement*, et lorsque le point A s'éloigne à l'infini on a $\mathrm{BC}=\mathrm{CD}$.

Observation 4. Les points A et C sont dits points *conjugués ;* de même B et D.

XXVII. Théorème. Si par un point fixe A situé dans le plan d'une conique, on mène une droite quelconque, coupant cette conique en deux points B et D ; si l'on prend le point C, harmoniquement conjugué du point A, relativement aux points B et D le lieu géométrique du point C est une droite.

Démonstration. 1^er^ Cas. Le point fixe A est l'origine ;

et soit $y+rx=0$ l'équation de la droite mobile ; alors l'équation (17) (XX) des points d'intersection devient $(Ar^2-Br+C)x^2+(E-Dr)x+F=0$.

Désignons par X et Y les coordonnées du point C harmoniquement conjugué ; On a donc $X=\frac{2F}{Dr-E}$; et $Y+rX=0$; d'où $r=-\frac{Y}{X}$. En remplaçant Y et X par y et x, éliminant r, on obtient pour le lieu géométrique cherché $Dy+Ex+2F=0$ qui est l'équation d'une droite.

2ᵉ Cas. Le point fixe A a pour coordonnées x', y' ; transportons l'origine au point A. L'équation de la conique devient $Ay^2+Bxy+Cx^2+D'y+E'x+F'=0$; $D'=2Ay'+Bx'+D$; $E'=2Cx'+By'+E$; $F'=Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'+F$; donc l'équation du lieu géométrique des points conjugués sera $D'y+E'x+2F'=0$; revenant à la première origine, l'équation de cette droite sera $D'(y-y')+E'(x-x')+2F'=0$; mettant à la place de D', E', F' leurs valeurs et en faisant les réductions, on a finalement

$$y(2Ay'+Bx'+D)+(2Cx'+By'+E)+Dy'+Ex'+2F=0\,;$$

cette droite est la *polaire* du point A, qui est lui-même le *pôle* de la droite : nous verrons plus bas les raisons de ces dénominations.

Observation. Lorsque le point fixe A est sur la courbe, l'équation de la polaire est identique avec l'équation (17) de la tangente en ce point.

XXVIII. Théorème. Si par un point extérieur pris sur la polaire, on mène deux tangentes à la conique, la droite de contact, passe par le pôle.

Démonstration. Soient x', y' les coordonnées du pôle, x'', y'' un point pris sur la polaire, de sorte qu'on a

$$y''(2Ay'+Bx'+D)+x''(2Cx'+By'+E)+Dy'+Ex'+2F=0,$$

ou bien

$$y'(2Ay''+Bx''+D)+x'(2Cx''+By''+E)+Dy''+Ex''+2F=0;$$

le point x', y' est donc sur la droite qui a pour équation

$$y(2Ay''+Bx''+D)+x(2Cx''+By''+E)+Dy''+Ex''+2F=0,$$

mais cette droite est celle qui réunit les deux points de contact des tangentes menées par le point x'', y'' (XXIII bis) ; donc, etc.

Observation 1. Ce théorème peut s'énoncer ainsi : si plusieurs points sont en ligne droite ; leurs polaires se coupent en un seul point, *pôle* de la droite ; c'est ce qui a porté M. Servois à donner le nom de pôle à ce point, parce que la polaire tourne autour de ce point ; et depuis, M. Gergonne a donné le nom de *polaire* à la droite tournante ; dénominations généralement admises et même transportées dans la géométrie à trois dimensions.

Observation 2. La polaire d'un point et la droite lieu géométrique du point conjugué harmoniquement à ce point, relativement aux points d'intersection, sont une seule et même ligne. Cette coïncidence n'a lieu que dans les lignes du second degré et pas dans les lignes de degré supérieur, comme nous verrons à la fin de cet article où nous étudierons les propriétés des courbes en général. Mais nous devons déjà expliquer que par polaire, d'une ligne de degré m, on entend une certaine ligne de degré $m-1$, passant par les points de contact des $m(m-1)$ tangentes qu'on peut mener par un point fixe à une ligne de degré m.

XXIX. *Coordonnées du pôle, connaissant l'équation de la polaire.*

Soit $dy+ex+f=0$ l'équation de la polaire ; x', y' les coordonnées du pôle ; on aura

$$\frac{e}{d}=\frac{2Cx'+By'+E}{2Ay'+Bx'+D}$$

$$\frac{f}{d}=\frac{Dy'+Ex'+2F}{2Ay'+Bx'+D}$$

d'où l'on tire
$$x'=\frac{-nd+le+kf}{k'd+ke+mf}$$
$$y'=\frac{l'd-ne+k'f}{k'd+ke+mf} \qquad (22)$$

XXX. Théorème. Le diamètre qui passe par un point est conjugué à la polaire de ce point.

Démonstration. En supposant que ce point est l'origine des coordonnées, on ne limite pas la généralité du théorème ; et dans ce cas l'équation du diamètre est $ky-k'x=0$ (IV) et l'équation de la polaire est $\mathrm{D}y+\mathrm{E}x+2\mathrm{F}=0$,
$$p=\frac{k'}{k},\ q=-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}},$$
ainsi l'équation (5) (IX) est satisfaite ; donc, etc.

XXXI. *Relation entre les coordonnées des points conjugués.* A étant un point situé sur le plan de la courbe et A′ le point d'intersection de la polaire de A avec le diamètre qui passe par A, les deux points A et A′ sont *conjugués*. Soient x', y' les coordonnées de A, et y, x les coordonnées de A′. On a pour équation du diamètre passant par A, $(y-y')(mx'-k)=(x-x')(my'-k')$; l'équation de la polaire peut se mettre sous la forme :
$$(y-y')(2\mathrm{A}y'+\mathrm{B}x'+\mathrm{D})+(x-x')(2\mathrm{C}x'+\mathrm{B}y'+\mathrm{E})+2\mathrm{F}'=0;$$
de ces deux équations, on tire les valeurs de $y-y'$ et de $x-x'$ et enfin
$$x=\frac{\mathrm{L}x'-k\mathrm{F}'}{\mathrm{L}-m\mathrm{F}'};\ y=\frac{\mathrm{L}y'-k'\mathrm{F}'}{\mathrm{L}-m\mathrm{F}'}. \qquad (23)$$

Corol. Lorsque le point A est situé à l'infini, on a
$$x=\frac{k}{m},\ y=\frac{k'}{m},$$
coordonnées du centre ; ainsi le centre est le point conjugué de tous les points situés à l'infini, ou en d'autres termes, le centre est le pôle de toutes les droites situés à l'infini et chaque diamètre est la polaire d'un point situé à l'infini sur le diamètre conjugué.

XXXII. *Théorèmes sur les poles et polaires.*

THEORÈME. Quatre points étant situés harmoniquement sur une droite, les polaires forment un faisceau harmonique, et *vice-versâ* quatre droites formant un faisceau harmonique, les quatre pôles sont situés harmoniquement sur une droite.

Démonstration. Sans rien ôter à la généralité de la proposition, nous pouvons supposer les quatre points A, B, C, D, situés sur l'axe des x, A étant l'origine des coordonnées et l'axe des y étant conjugué à l'axe des x ; soient x', x'', x''', les abscisses des points B, C, D ; les ordonnées sont nulles.

On a donc $$\frac{2}{x'''}=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''} \qquad (\mathrm{A})$$

On a pour les équations des quatres polaires

Point A.... $Dy+Ex+2F=0$

B.... $Dy+x(2Cx'+E)+Ex''+2F=0$

C.... $Dy+x(2Cx''+E)+Ex''+2F=0$

D.... $Dy+x(2Cx'''+E)+Ex'''+2F=0$

Car, les axes des coordonnées étant conjugués, on a $B=0$; faisant $x=0$, on obtient quatre point ayant pour ordonnées,

$$-\frac{2F}{D}; -\frac{2F}{D}-\frac{Ex'}{D}; -\frac{2F}{D}-\frac{Ex''}{D}; -\frac{2F}{D}-\frac{Ex'''}{D};$$

mais ces quatre points, en vertu de l'équation (A) sont situés harmoniquement, donc le faisceau est harmonique ; la réciproque se démontre de la même manière.

Observation. Lorsque les quatre droites $y=mx$; $y=nx$; $y=px$; $y=qx$ forment un faisceau harmonique, on a la relation $(m+p)(n+q)=2(mp+nq)$ et *vice versâ* (*V.* *p*.317, t. I).

XXXIII. THÉORÈME. Un quadrilatère convexe ou non convexe, étant inscrit dans une conique, la polaire de l'intersection de deux côtés opposés passe par le point d'intersection de deux autres côtés.

Nous supprimons la démonstration qui est très-facile.