NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Théorème de Descartes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 248-259

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__248_0>

THÉORÈME DE DESCARTES.

I. *Observation essentielle.* Dans tout ce qui suit, les polynômes sont à une seule variable, entiers, à coefficients réels rationnels, et le coefficient du premier terme est positif; les polynômes sont ordonnés suivant l'ordre descendant.

II. Lemme 1. Le nombre des variations que renferme un polynôme est pair ou impair, selon que le dernier terme est positif ou négatif, et réciproquement.

Démonstration. 1er cas. Le dernier terme est *positif* : pour l'objet qu'on a en vue, on peut toujours considérer les termes successifs de même signe comme ne formant qu'un seul terme, et ensuite décomposer chaque terme positif, les deux extrêmes exceptés, en deux autres aussi positifs; alors le polynôme devient une réunion de trinômes de la forme $+-+$; chaque trinôme a deux variations, donc le total des variations est pair.

2e *cas.* Le dernier terme est *négatif:* raisonnant de la même manière, on aura un certain nombre de ces trinômes, plus le binôme terminal $+-$; le nombre total des variations est donc impair.

Ces deux cas démontrés, la réciproque est évidente.

Corollaire. Un polynôme qui n'a aucune racine positive, a nécessairement un nombre pair de variations; car, d'après un théorème connu, le dernier terme d'un tel polynôme est positif, donc.....

Observation. Le nombre pair comprend le zéro, ici et dans ce qui suit.

III. Lemme 2. Un polynôme en x, étant multiplié par le facteur linéaire $x-\alpha$, où α représente une quantité essentiellement positive, le produit acquiert nécessairement et *au moins* une variation de plus.

La démonstration est dans tous les traités élémentaires.

Corollaire. Un polynôme en x étant multiplié par $x-\alpha$, acquiert en plus un nombre *impair* de variations; car le dernier terme du polynôme est de signe opposé au dernier terme du produit; donc, si le nombre des variations de l'un est pair, celui de l'autre est impair, et réciproquement (lemme 1); donc la différence est impaire.

IV. Lemme 3. Le nombre des variations d'un polynôme moins le nombre de ses racines positives donne toujours une différence paire.

Démonstration. 1er *cas.* Le nombre des racines positives est *pair* : décomposons le polynôme en facteurs linéaires; faisant le produit des facteurs linéaires, correspondant aux racines imaginaires et aux racines négatives seulement, on obtient un polynôme réel, ayant un nombre pair de variations (lemme 1, *corol.*); chaque facteur linéaire correspondant a une racine positive introduit un nombre impair de variations; mais comme le nombre des racines positives est pair, le nombre des variations introduites est pair; le nombre total des variations est donc pair; donc.....

2e *cas.* Le nombre des racines positives est *impair* : raisonnant de la même manière, on en déduit que le nombre total des variations est impair; donc.....

V. *Définitions.* Nous appellerons une *lacune paire*, deux termes *successifs* entre lesquels manque un nombre pair de termes. Lorsque ce nombre est zéro, la lacune devient nulle, et les termes sont *consécutifs*; une *lacune impaire* est formée par deux termes entre lesquels manque un nombre impair de termes; lorsqu'une lacune paire forme une permanence, nous dirons pour abréger que c'est une permanence à lacune paire, et ainsi des autres.

VI. Dans une lacune impaire, les exposants des deux termes successifs sont tous deux pairs ou tous deux impairs; dans une lacune paire, des deux exposants, l'un est pair et l'autre impair.

VII. Dans une lacune impaire, permanence ou variation, si l'on remplace x par $-x$, la permanence et la variation ne changent pas; mais si la lacune est paire, la permanence devient une variation, et la variation une permanence, conséquence immédiate de l'énoncé précédent (VI).

VIII. *Notation.* m, degré du polynôme; T, nombre des termes du polynôme; t, nombre des termes manquants; ν, nombre total de variations; ν', nombre de variations répondant à des lacunes impaires; ν'', nombre de variations répondant à des lacunes paires ou nulles; p, nombre total des permanences; p', nombre de permanences répondant à des lacunes impaires; p'', nombre de permanences répondant à des lacune paires ou nulles; O, nombre des racines positives; N, nombre des racines négatives; I, nombre des racines imaginaires.

Observation. Tous ces nombres sont évidemment entiers et positifs.

IX. *Équations.* $m = \mathrm{T} + t - 1 = \mathrm{O} + \mathrm{N} + \mathrm{I}$ (1)

$$\mathrm{T} = p + \nu + 1 \quad (2)$$

$$\nu = \nu' + \nu'' \quad (3)$$

$$p = p' + p'' \quad (4)$$

$$\mathrm{O} = \nu - z \quad (5)$$

$$t = p' + \nu' + z' \quad (6)$$

$$\mathrm{N} = \nu' + p'' - z'' \quad (7)$$

$$\mathrm{I} = 2p' + z + z' + z'' \quad (8)$$

z, z', z'' sont des quantités entières, positives; paires ou nulles.

X. Les quatre premières équations sont évidentes; la cinquième n'est autre que la transcription du lemme 3; chaque lacune impaire annonçant au moins un terme manquant, rend évidente l'équation (6); t et $p'+v'$, sont simultanément pairs ou impairs, donc z' est pair. En remplaçant dans le polynôme x par $-x$, le nombre des variations du second polynôme est $v'+p''$ (VII) ; mais les racines positives du second polynôme sont les racines négatives du premier polynôme changées de signe ; l'équation (7) n'est donc que l'équation (5) appliquée au second polynôme.

Les équations (1) et (2) donnent $p+v+t=\mathrm{O}+\mathrm{N}+\mathrm{I}$; mettant au lieu de O, N et t, leurs valeurs, on obtient l'équation (8).

XI. Les racines imaginaires sont toujours en nombre pair; c'est ce qu'indique l'équation (8).

XII. L'équation (8) donne cet énoncé : Il y a toujours et au moins autant de couples de racines imaginaires que de permanences répondant à des lacunes impaires.

XIII. Si toutes les racines sont réelles, on a $\mathrm{I}=0$, et par conséquent $p'=z=z'=z''=0$; donc, $\mathrm{O}=v$; $\mathrm{N}=v'+p$. Ainsi, dans ce cas, le nombre des racines positives est égal à celui des variations, et le nombre des racines négatives est égal au nombre des permanences, plus le nombre des variations à lacunes impaires.

Or $t=v'$; il s'ensuit qu'aucune lacune ne peut provenir de plus d'un terme manquant; donc lorsqu'il manque un terme entre une permanence, ou au moins deux termes entre une variation, l'équation a toujours des racines imaginaires.

XIV. Si toutes les racines sont réelles, et si de plus l'équation est complète, il y a autant de racines positives que de variations, et autant de racines négatives que de permanences, parce que, dans ce cas, on a aussi $v'=0$; donc $\mathrm{N}=p''=p$.

XV. Si l'équation est complète, le nombre des racines négatives ne peut jamais dépasser le nombre des permanences, car, dans ce cas, l'équation (7) devient $\mathrm{N}=p-z''$; si l'équation est incomplète, il faut remplacer les termes manquants par des coefficients nuls.

XV. *Note historique.* Le discours sur *la méthode* a paru en juin 1637 (*). Cette immortelle production a été considérée comme la logique du système de notre illustre philosophe, qui a appliqué sa méthode de raisonner à trois objets 1° la dioptrique, 2° les météores, 3° la géométrie. Les équations n'étant, logiquement appréciées, qu'une suite de syllogismes, des espèces de *sorites,* il applique la théorie des équations à l'explication et à la recherche, à l'exégèse, et à la zététique, comme disait Viète, des propriétés de l'espace ; marche qui a été adoptée et suivie par Newton et Euler, et qui a été abandonnée, au détriment de la science, ce me semble, par les auteurs des traités modernes. Car, l'application de l'algèbre à la géométrie, autrement, la résolution des problèmes de géométrie, par les procédés algébriques, est antérieure à Descartes; ce qui appartient spécialement à l'illustre géomètre, c'est l'interprétation géométrique des propriétés des équations, quant aux racines, quant aux coefficients. C'est dans sa géométrie que Descartes énonce, sans démonstration, ce qu'on est convenu d'appeler la *règle des signes;* il s'exprime ainsi : « On connoît de ceci combien *il peut* y avoir de racines vrayes et combien de fausses en chaque équation, à sçavoir, *il y peut* avoir autant de vrayes que les signes + et — s'y trouvent de fois être changés et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes + ou deux signes moins qui s'entresuivent. »

En 1631 avait paru l'algèbre de Harriot (Thomas) (*) publiée par son ami Walter Warner sous le titre : *Artis analyticæ*

(*) Descartes (René), ne à la Haye (Touraine) le 31 mars 1596; mort à Stockholm le 11 février 1650. Les deux editions latines de la géométrie de Descartes, par F. Schooten, sont de 1649 et 1659.

(**) Harriot, Thomas), ne a Oxford en 1560 ; mort à Londres le 2 juillet 1621.

praxis ad æquationes algebraïcas nova, expedita, et generali methodo resolvendas. — Le célèbre Anglais considère les équations comme le produit de facteurs linéaires, et déduit de là des relations entre les racines et les coefficients ; il est certain que si Descartes a eu connaissance de cet ouvrage, il a pu y puiser, par voie d'induction, sa règle des signes ; aussi un Anglais, lord Cavendish, ayant montré cette algèbre à Roberval, homme d'un mauvais caractère, celui-ci ne manqua pas d'accuser Descartes d'abord d'un plagiat et ensuite d'avoir donné une règle fausse, de s'être emparé d'une erreur ; ce qui serait à la fois une mauvaise action et une bévue. Pour établir l'erreur, Roberval suppose que Descartes dit d'une manière absolue qu'il y a *toujours* autant de racines positives que de variations et autant de racines négatives que de permanences ; et il communiqua à l'Académie des Équations où la règle de Descartes était en défaut ; chose très-facile et manifeste. Retiré au fond de la Hollande, Descartes apprit tard cette perfidie, et, six mois avant sa mort, il écrit à son ami de Carcavi : « Sa seconde objection est une fausseté manifeste ; car, je n'ay pas dit, dans la page 373 (*de sa géométrie*) ce qu'il veut que j'aye dit, à sçavoir, qu'il y a autant de vrayes racines que les signes + et — se trouvent de fois être changez, ny n'ay eu aucune intention de le dire. J'ai dit seulement qu'il y en peut avoir ; et j'ay montré expressément dans la page 380, quand c'est qu'il n'y en a pas tant, à savoir, quand quelques-unes de ces vrayes racines sont imaginaires. » (La Haye (Hollande), 17 août 1699, lettre 77, tome 3.) Quant à l'accusation de plagiat, on peut s'en rapporter au célèbre Wallis (Jean) (*), qui a composé une algèbre historique et pratique, où il donne une longue analyse de l'ouvrage de Harriot, et enthousiaste de cet auteur, comparant ses travaux à

(*) Wallis (Jean), né à Ashford le 23 nov. 1616 ; mort à Londres le 28 oct. 1703 ; precurseur du calcul intégral.

ceux de Descartes, il trouve que le géomètre français a emprunté ou a pu emprunter trente articles divers à son compatriote; mais quant à la règle des signes : *Hanc regulam agnosco in Harrioto non haberi. Cartesianum utique hoc est. Sed falsam est. Habetque Harriotus regulas certiores* (*Algebra*, tome II, page 215, traduction latine de 1693). Les règles *certiores* de Harriot sont insignifiantes et ne se rapportent qu'à des cas particuliers des quatre premiers degrés et le *falsum* est dans le genre de Roberval ; il pose cette équation $x^4+6x^3+111x^2+1993x+35878=0$; et l'ayant multipliée par $x-18$; il vient $x^5-12x^4+3x^3-5x^2+4x-645804=0$; or, dit-il, selon la règle de Descartes, la première équation aurait 4 racines négatives et la seconde 5 racines positives ; ce qui est d'une fausseté évidente ; mais il est évident également que cette prétendue régle n'est pas celle de Descartes.

Ce n'est qu'en 1741, qu'on a donné une démonstration de la règle de Descartes et on la doit à l'abbé Gua (de Malves) Jean-Paul (*). Son mémoire inséré cette année dans ceux de l'Académie des sciences, porte pour titre : *Démonstrations de la règle de Descartes pour connaître le nombre des racines positives et négatives dans les équations qui n'ont pas de racines imaginaires.* Il en donne deux démonstrations ; la première est fondée sur ces deux théorèmes : 1° une équation n'ayant que des racines réelles, si on écrit au-dessous une progression arithmétique quelconque ayant pour raison —1, en allant de droite à gauche, multipliant chaque coefficient par le terme correspondant, on obtient une nouvelle équation dont les racines sont réelles; ce qu'on peut démontrer à l'aide du théorème de Rolle ; 2° dans une équation n'ayant que des racines réelles, le carré d'un coefficient quelconque est tou-

(*) Né à Carcassonne en 1712 et mort à Paris en 1786, ayant speculé sur des mines d'or, dans un état voisin de l'indigence jours plus grand que le produit des deux coefficients voisins à droite et à gauche ; ce théorème est de Gua et est un corollaire du premier ; on en trouvera une démonstration plus bas.

La seconde démonstration est fondée sur la considération d'une courbe de genre parabolique ; les propriétés de ces courbes ont servi au même auteur à déterminer le nombre des racines imaginaires ; ses principes ont dirigé depuis les travaux de M. Cauchy et de Fourier ; nous en parlerons en traitant du théorème de ce dernier géomètre. Depuis on a donné plusieurs autres démonstrations ; la plus simple est celle de Segner (*) : elle consiste simplement, dit Lagrange, à faire qu'en multipliant une équation quelconque par $x-a$ on augmente d'une unité le nombre des variations de signe, et qu'en la multipliant par $x+a$, on augmente aussi d'une unité le nombre des permanences, quelle que soit la valeur des coefficients de l'équation (Résolution des équations numériques, note VIII). La première partie de cette proposition est toujours vraie, mais la seconde exige que l'équation soit complète. C'est ce que met d'ailleurs en évidence la multiplication de $x-a$ par $x+a$. Aussi le théorème n'a été énoncé d'une manière suffisamment exacte qu'en 1832, dans l'excellente algèbre de Mayer et Choquet (XIII) ; de là cet énoncé a passé dans tous les traités qui ont aussi admis avec quelques modifications la démonstration de Segner, copiée dans le complément des éléments d'algèbre de M. Lacroix, vénérable doyen des membres de l'académie, le géomètre le plus savant, le plus lettré de France, excellent écrivain dont les ouvrages, propageant les méthodes de l'école de Lagrange, ont régénéré, depuis un demi-siècle, l'enseignement de la science.

(*) Segner (Jean-André de), né à Presbourg le 9 oct. 1704 ; mort à Halle le 5 oct. 1755 ; connu par sa machine à réaction. Sa demonstration du théorème de Descartes est dans les Mémoires de l'Academie de Berlin. 1756.

XVI. *Théorème de De Gua.* **Dans toute équation complète ou rendue telle, et qui n'a que des racines réelles, le carré d'un coefficient quelconque est plus grand que le produit de deux coefficients voisins.**

Démonstration. Soit l'équation complète :

$$(Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \ldots A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m = 0 \quad (1)$$

où les coefficients peuvent être nuls.

Si toutes les racines sont réelles, il en sera de même de toutes les équations dérivées (theorème de Rolle).

Formons les réciproques de ces dérivées :

$$A_{m-1}x^{m-1} + 2A_{m-2}x^{m-2} + 3A_{m-3}x^{m-3} + \ldots\ldots\ldots + mA = 0$$

$$2A_{m-2}x^{m-2} + 2\text{-}3A_{m-3} + ^{m-3} + 3.4.A_{m-4}x^{m-4} + \text{etc.} \qquad = 0$$

$$\vdots$$

$$[m-p-2]A_{p+2}x^{p+2} + [m-p-1]A_{p+1}x^{p+1} + \frac{[m-p]}{1.2}A_px^p +$$

$$+ \frac{[m-p+1]}{1.2.3}A_{p-1}x^{p-1} + \ldots \text{etc.} = 0 \qquad (2)$$

Cette dernière équation est la réciproque de la dérivée de l'ordre $m-p-2$ et doit avoir toutes ses racines réelles ; les quantités renfermées entre crochets, indiquent des produits continuels. La dérivée de l'ordre p, de cette équation (2) est du second degré et aussi à racines réelles ; cette équation est :

$$\frac{1}{2}[p+2][m-p-2]A_{p+2}x^2 + [p+1][m-p-1]A_{p+1}x +$$

$$+ \frac{1}{2}[m-p][p]A_p = 0 \qquad (3)$$

La réalité des racines de cette équation exige que l'on ait la condition, après toute les simplifications opérées,

$$A^2_{p+1} > \frac{p+2}{p+1} \cdot \frac{m-p}{m-p-1} A_pA_{p+2} ; \qquad (4)$$

Ce signe indique que la quantité qui le précède n'est pas inférieure à celle qui le suit ; d'où a fortiori

$$A_{p+1}{}^2 > A_p\ A_{p+2} \quad (5)$$

Cette démonstration est d'Euler, (*M. Ac. Pet.* t. XIII, p. 105) elle fournit, dans l'inégalité (4), un criterium précieux pour établir la possibilité de la réalité de toutes les racines; mais s'il ne s'agit que de l'inégalité (5), on peut y parvenir d'une manière plus courte, en considérant que dans l'équation (2) la somme des carrés des racines devant être positive, l'on en tire

$$A^2_{p+1} > \frac{m-p}{m-p-1} \cdot A_p A_{p+1}.$$

Il ne faut pas oublier que l'absence des racines imaginaires entraîne cette inégalité; mais la réciproque est fausse : l'existence de cette inégalité n'entraîne pas l'absence des racines imaginaires.

XVII. La proposition suivante, peut-être nouvelle, est très-générale : soient

$$A_1 x^p + A_2 x^{p-1} + A_3 x^{p-2} \ldots\ldots + \ldots\ldots A_{n+3} x^{p-n+2}$$

$n+3$ termes consécutifs d'une équation de degré m ; formons la suite des différences premières des coefficients, en retranchant chaque coefficient du précédent ; de même la suite des différences secondes, jusqu'aux différences du rang n ; si l'on a l'équation $\Delta^n A_1 . \Delta^n A_3 = (\Delta^n A_2)^2$,
l'équation a des racines imaginaires, et autant de fois que cette relation se présente, autant l'équation a de couples de racines imaginaires, au moins.

Exemple :

$n=0$; $A_1 A_3 = A_2^2$: $n=1$, $(A_1 - A_2)(A_3 - A_4) = (A_2 - A_3)^2$;
donc si A_1, A_2, A_3, A_4, sont en progression arithmétique, il y a des racines imaginaires, observation qu'on doit à M. Hermite (*Nouvelles annales*, t. I, p. 385);
$n=2$; $(A_1 - 2A_2 + A_3)(A_3 - 2A_4 + A_5) = (A_2 - 2A_3 + A_4)^2$ etc.

On démontre la proposition, en multipliant le polynôme par un facteur linéaire arbitraire $x-\alpha$; si l'on peut déterminer α, de telle sorte qu'il y ait, à la fois, dans le produit une lacune et une permanence, et α étant réel, il est évident que le polynôme donné a des racines imaginaires.

XVIII. Descartes, dont la géométrie a répandu une si vive lumière sur la théorie des racines négatives, a conservé la dénomination ancienne, si vicieuse, de racines *fausses.* C'est un reste d'habitude, mais il est fort singulier de lire dans un ouvrage imprimé à Paris, en 1733, le passage suivant : « Les racines imaginaires sont celles qui sont sous un
» signe radical avec le signe —, et dont l'exposant est un nom-
» bre pair ; comme $x=\sqrt{-ab}$, et comme la valeur de ces
» racines ne peut être exprimée, on les regarde comme nulles,
» ou $=0$; de sorte que $x=\sqrt{-ab}$ doit être regardée comme
» $x=0$. »

Voir page 7 de l'Application de l'algèbre à la géométrie, par M. Guisnée, membre de l'Académie des sciences, professeur royal.

XIX. M. Gauss a donné une nouvelle démonstration, aussi belle que rigoureuse, de la règle de Descartes (*Journal de Crelle*, t. III, p. 1); cette démonstration ayant été exposée par M. Gergonne (*Annales*, t. XVIII, p. 352. 1837), elle a été depuis introduite dans les éléments ; nous croyons utile de reproduire l'exposition de M. Gergonne qui nous paraît plus claire.

Soit X un polynôme n'ayant aucune racine positive, et soit

$$X=Mx^m+\ldots-Nx^n\ldots+Px^p+\ldots-Qx^q\ldots+Ux^u\ldots+V \quad (1)$$

On peut toujours supposer le premier terme positif ; soit $-Nx^n$ son premier terme négatif ; soit $+Px^p$ le premier terme positif qui se présente à la suite de celui-là ; soit $-Qx_n$ le premier terme négatif qui le suit et ainsi du reste. $+Ux^u$ est le premier des termes consécutifs qui ont le même signe que le dernier, qui est nécessairement positif, vu que le polynôme n'a aucune racine positive.

M, N, P, Q, U, V sont des nombres positifs quelconques, et m, n, p, q, u des nombres entiers continuellement décroissants ; soit α une quantité réelle positive, on aura

$$X(x-\alpha)=Mx^{m+1}\ldots-N'x^{n+1}\ldots+P'x^{p+1}-Q'x^{q+1}.+U'x^{u+1}-V\alpha(2)$$

N′, P′, Q′, V′ étant des nombres positifs, car le terme en x^{n+1} provient de la multiplication de $-Nx^n$ par x plus le produit du terme qui précède celui-ci dans (1) par $-\alpha$; ce terme précédent est positif, donc le produit de ce terme par $-\alpha$ est négatif ; par la même raison P′ est positif et ainsi de suite. Dans (1), il n'y a qu'une variation entre Mx^m et $-Nx^n$; mais dans la suite (2), il y a *au moins* une variation entre Mx^{m+1} et $-N'x^{n+1}$; car entre eux, il peut y avoir encore d'autres variations ; dans la suite (1) il n'y a que deux variations entre Mx^m et $+P'x^p$; dans la suite (2) il y a *au moins* deux variations entre Mx^{m+1} et $P'x^{p+1}$; de sorte que parvenu au terme $+U'x^{u+1}$, on aura rencontré autant de variations au moins qu'on en avait rencontré dans (1) lorsqu'on était parvenu au terme Ux^u; mais comme le signe du dernier terme $-\alpha V$ est contraire à celui du terme $+U'x^{u+1}$ tandis que celui du dernier terme $+V$ est semblable à celui du terme Ux^u, il s'ensuit que finalement parvenu au dernier terme de (2), on aura rencontré tout au moins une variation de plus qu'on n'en avait rencontré dans (1) ; c'est-à-dire que dans X $(x-\alpha)$, il y a au moins une variation de plus que dans X. Par un raisonnement tout à fait semblable, et qui est indépendant du signe de V, il y aura tout au moins dans X $(x-\alpha)$ $(x-\beta)$ une variation de plus que dans X $(x-\alpha)$, et par conséquent deux variations de plus que dans X, et ainsi de suite.

Depuis la rédaction de cet article, M. Lacroix nous a été enlevé. C'était un honnête homme, un philosophe pratique. Nous ne connaissons point de plus bel, de plus rare éloge ni de mieux mérité. Tm.