

LOUIS YVON

**Démonstration du théorème 36.
Propriétés des rayons vecteurs dans
l'ellipse et l'hyperbole**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 237-239

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__237_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 36 (tome I, p. 395).

Propriétés des rayons vecteurs dans l'ellipse et l'hyperbole.

PAR M YVON (LOUIS),

Eleve du College royal Charlemagne.

Un demi-diamètre d'une ellipse ou d'une hyperbole est moyen proportionnel entre les rayons vecteurs menés des foyers à l'extrémité du demi-diamètre conjugué.

Soient OD, OD' (fig. 44), deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse; x', y' , les coordonnées du point D. L'équation de OD' sera $y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} x$, en nommant a, b , les demi-axes de l'ellipse que l'on suppose rapportée à ses axes. On aura les coordonnées y, x , du point D', en résolvant les équations

$$y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} x, \text{ et } a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Ce qui donne

$$x = \sqrt{a^2 - x'^2}, \text{ et } y = -\frac{b x'}{a}.$$

Par suite :

$$\overline{OD'}^2 = x^2 + y^2 = a^2 - \frac{c^2 x'^2}{a^2} = \left(a - \frac{c x'}{a}\right) \left(a + \frac{c x'}{a}\right).$$

Mais $\left(a - \frac{c x'}{a}\right), \left(a + \frac{c x'}{a}\right)$ sont les rayons vecteurs DF', DF, menés du point D, aux foyers F', F. Donc $\overline{OD'}^2 = \overline{DF'} \times \overline{DF}$.

Cette propriété, qui est également vraie pour l'hyperbole, se démontrerait de la même manière ; elle conduit à une démonstration très-simple du théorème suivant : *la normale et la tangente menées par un point d'une conique interceptent sur un axe principal, une longueur égale au produit des rayons vecteurs, passant par ce point, divisé par la distance du point au second axe. Dans la parabole, cette longueur est égale au double du rayon vecteur* (tome I, p. 395).

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une ellipse (fig. 44). Soit DH, la normale menée par le point D ; PDK la tangente ; et DG une perpendiculaire sur l'axe OC. Je dis qu'on aura $DG \times HK = FD \times F'D$. En effet, les deux triangles semblables PDG, HDK donnent la proportion $DG : DK :: PD : HK$; d'où $DG \times HK = DK \times PD$. Mais, d'après une propriété

connue, on a $DK \times PD = \overline{OD'}^2$; le demi-diamètre OD' étant supposé parallèle à la tangente PDK . Donc,

$$DG \times HK = \overline{OD'}^2 = FD \times F'D.$$

Cette propriété, qui se démontrerait de même pour l'hyperbole, serait facile à modifier, si la perpendiculaire DG , était abaissée sur l'autre axe.

Passons maintenant à la parabole (*fig. 45*).

Je dis que $HK = 2FD$; le point D est un point quelconque de la parabole, F le foyer, EDK la tangente au point D , DH la normale, et KH l'axe.

En effet, on sait que $DF = KF$. Par le point D je mène le diamètre DA . Alors, l'angle $EDA = KDF$; donc,

$$FDH = HDA = DHF.$$

Par conséquent, le triangle DHF est isocèle, et $FD = FH$. Ce qui donne $KH = 2FD$. Le principe est donc démontré.
