

MOURGUES

Théorèmes sur les polygones réguliers inscrits et circonscrits

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 229-231

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2_229_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES

Sur les polygones réguliers inscrits et circonscrits.

PAR M. MOURGUES ,

Professeur au collège de Rhodéz.

THEORÈME 1. *Les lignes polygonales régulières inscrites dans un arc de cercle augmentent en périmètre avec le nombre des côtés. Il en est de même des aires comprises entre ces lignes et la corde qui joint les extrémités de l'arc.*

THEORÈME 2. *Les lignes polygonales régulières circonscrites à un arc de cercle et terminées aux prolongements des rayons passant par les extrémités de cet arc, diminuent en périmètre avec le nombre des côtés. Il en est de même des aires comprises entre ces lignes et les rayons prolongés qui passent par les extrémités de l'arc.*

Les deux théorèmes précédents peuvent se déduire comme corollaires de deux autres théorèmes dont les énoncés suivent .

THEORÈME 3. *Parmi les lignes polygonales d'un même nombre de côtés , inscrites dans un même arc de cercle, la plus grande est celle qui est régulière.*

THEORÈME 4. *Parmi les lignes polygonales d'un même nombre de côtés, circonscrites à un même arc de cercle*

et terminées aux prolongements des rayons extrêmes, la plus petite est celle qui est régulière.

Admettons pour un instant ces deux théorèmes.

Conséquence du troisième Théorème. Soit inscrite dans un arc de cercle une ligne polygonale régulière de n côtés. Si l'on remplace l'un des côtés par deux cordes, on aura une ligne polygonale irrégulière de $n + 1$ côtés, laquelle sera évidemment plus grande que la précédente, et sera plus petite, en vertu du théorème troisième, que la ligne polygonale régulière de $n + 1$ côtés. Donc, la ligne polygonale régulière de $n + 1$ côtés est plus grande que celle de n côtés.

Conséquence du quatrième Théorème. Soit circonscrite à un arc de cercle et terminée aux prolongements des rayons extrêmes une ligne polygonale régulière de n côtés. Soient (fig. 38) AB, BC deux de ses côtés. Si dans l'angle ABC on mène une tangente EF et qu'on supprime les parties EB, BF, on aura une ligne de $n + 1$ côtés, laquelle sera évidemment plus petite que la précédente; et sera plus grande, en vertu du quatrième théorème, que la ligne polygonale régulière de $n + 1$ côtés; ce qui conduit à l'énoncé du deuxième théorème.

Démonstration du troisième Théorème. Soit (fig. 39) AB un arc de cercle dans lequel on inscrit deux cordes quelconques, AC, CB, qui font un angle constant indépendant de la position du point C. Si l'on prolonge AC d'une quantité $CD = CB$, et qu'on joigne DB, il résultera du triangle isocèle CBD que l'angle D est constant. Le lieu géométrique des points D est donc un segment de cercle AD'DB dont le centre est en O, point milieu de l'arc, car $OD' = OB = OA$. Par suite, le diamètre AD' est plus grand que la corde AD, ce qui donne

$$AO + OB > AC + CB,$$

inégalité qui démontre le théorème pour un polygone de deux côtés.

Cela posé, soit inscrite dans un arc de cercle une ligne polygonale de n côtés. Si elle n'est pas régulière, il y aura nécessairement quelque part deux côtés consécutifs inégaux ; en leur substituant deux côtés égaux, la ligne augmentera de périmètre. Toute ligne irrégulière de n côtés peut donc être augmentée sans changer le nombre des côtés. Or, parmi toutes ces lignes, il y a un *maximum* : c'est donc la ligne polygonale régulière.

Démonstration du quatrième Théorème. Soit (*fig. 40*) AB un arc de cercle auquel je circonscris deux cordes quelconques ac , cb , terminées aux prolongements des rayons extrêmes. On sait que parmi les droites inscrites dans un angle, tangentiellement à l'arc intercepté, la plus petite est celle dont le point de contact coïncide avec le milieu de l'arc. Or, si, comme on le suppose, on n'a pas $ac = cb$, les points de tangence I et I' ne sont pas les milieux des arcs AC, CB. Donc, la ligne continue acb de la *fig. 40* est plus grande que la ligne discontinue formée (*fig. 41*) des longueurs ac , $c'b$, M et M' étant les milieux des arcs AC, CB. Si, en second lieu, je prolonge ac en d , le triangle $cc'd$, dans lequel l'angle c est évidemment plus grand que c' , donne $c'd > cd$; et si, à la somme $ac + c'd$, j'ajoute cd et que j'en retranche $c'd$, il viendra

$$ad + db < ac + c'b.$$

La ligne continue adb se trouve dans le même cas que la ligne acb de la *fig. 40*. Si donc C n'est pas le milieu de AB, c'est-à-dire si adb n'est pas une ligne régulière, on pourra trouver une ligne discontinue plus petite, et puis une ligne continue encore plus petite. Or, il y a un *minimum* parmi ces lignes continues et discontinues : c'est donc la ligne régulière ; ce qui démontre le théorème pour le cas d'une ligne de deux côtés. Ce théorème se généralise absolument comme celui qui précède.