

CADET

Note sur le trapèze

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 189-191

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__189_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

SUR LE TRAPÈZE,

PAR M. CADET,
Enfant de troupe, au 59^e.

I. Dans tout trapèze ABCD (fig. 31) la différence des carrés des deux diagonales, AC et BD, est à la différence des carrés des côtés non parallèles, AB et CD, comme la somme des côtés parallèles, AD et BC, est à la différence de ces mêmes côtés, c'est-à-dire qu'on aura :

$$\blacklozenge \overline{BD}^2 - \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2 - \overline{AB}^2 :: AD + BC : AD - BC.$$

Démonstration. Des sommets B et C du trapèze j'abaisse des perpendiculaires BI et CE sur la base AD. Dans le triangle ABD je prends la valeur du carré de la diagonale BD, et j'ai :

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2AD \times AI.$$

De même du triangle ACD, je tire :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2AD \times ED.$$

Retranchant ces deux égalités membre à membre, j'ai :

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 - \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 - 2AD \times AI + 2AD \times ED \\ &= \overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 + 2AD (ED - AI). \end{aligned}$$

Cela posé, je fais

$$BD=s, AC=s', AD=a, BC=b, CD=c, AB=d, ED=x, AI=y.$$

$$\text{D'où} \quad s'^2 - s^2 = d^2 - c^2 + 2a (x - y) \dots \dots (1).$$

Or, si je mène par le point C la droite CG parallèle à AB, les deux triangles GEC et AIB seront égaux, comme étant rectangles l'un en E, l'autre en I, de plus CE=BI et CG=AB comme parallèles comprises entre parallèles; donc

$$GE=AI=y.$$

Or, on a $GE+ED=GD=AD-AG=AD-BC$,

ou $x+y=a-b$; on a aussi en vertu d'un théorème connu

$$\overline{ED}^2 - \overline{EG}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{GC}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{AB}^2$$

ou $x^2 - y^2 = c^2 - d^2$ ou $(x+y)(x-y) = c^2 - d^2$. Remplaçant $x+y$ par sa valeur dans la deuxième équation, j'ai

$$(a-b)(x-y) = c^2 - d^2, \text{ d'où } x-y = \frac{c^2 - d^2}{a-b}.$$

Je vais maintenant mettre cette valeur dans l'équation (1).

J'ai : $s^2 - s'^2 = d^2 - c^2 + \frac{2a(c^2 - d^2)}{a-b}$; additionnant et effec-

tuant dans le deuxième membre, on a :

$$s^2 - s'^2 = \frac{ad^2 - ac^2 - bd^2 + bc^2 + 2ac^2 - 2ad^2}{a-b}$$

et, en réduisant : $s^2 - s'^2 = \frac{a(c^2 - d^2) + b(c^2 - d^2)}{a-b}$; mettant

$c^2 - d^2$ en facteur commun, j'ai $s^2 - s'^2 = \frac{(c^2 - d^2)(a+b)}{a-b}$,

d'où je tire la proportion $s^2 - s'^2 : c^2 - d^2 :: (a+b) : (a-b)$, ou

$$\overline{BD}^2 - \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2 - \overline{AB}^2 :: AD + BC : AD - BC.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

II. D'après un théorème connu, on a aussi :

$$s^2 + s'^2 = c^2 + d^2 + 2ab.$$

C'est-à-dire que la somme des carrés des diagonales d'un trapèze est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles, plus au double rectangle des côtés parallèles.

Donc, j'ai ainsi, entre les 4 côtés et les 2 diagonales d'un trapèze, deux relations qui permettent, étant données 4 quelconques de ces 6 quantités, de trouver les 2 autres. Ainsi, pour avoir la diagonale s , j'additionne les deux équations et j'obtiens toute réduction faite :

$$s = \sqrt{\frac{a(c^2 - b^2) + b(a^2 - d^2)}{a - b}}.$$

Si l'on suppose $b > c$, la formule se mettra sous la forme

$$s = \sqrt{\frac{b(a^2 - d^2) - a(b^2 - c^2)}{a - b}}.$$

Ou bien encore,

$$s = \sqrt{\frac{a(c + b)(c - b) + b(a + d)(a - d)}{a - b}}.$$

On trouverait de même pour la diagonale s' ,

$$s' = \sqrt{\frac{a(d^2 - b^2) + b(a^2 - c^2)}{a - b}}.$$

Les relations obtenues donnent le moyen de résoudre ce problème : Construire un trapèze connaissant les deux diagonales et les deux côtés non parallèles.

Il faudrait construire le triangle AOB (*fig. 31*). Pour cela, il faut partager chaque diagonale en parties proportionnelles aux bases, on le voit d'après la similitude des triangles BOC et AOD. Or, le théorème démontré ci-dessus fournit le rapport cherché, car on a :

$$s^2 - s'^2 : c^2 - d^2 :: a + b : a - b.$$

En faisant la proportion par différence, on obtient facilement le rapport de a à b .