

H. DE SAILLY

Démonstration du théorème 33

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 2
(1843), p. 115-117

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__115_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 33 (p. 394, t. I).

PAR H. DE SAILLY,

Ancien élève de l'École polytechnique.

THÉORÈME.

Les périmètres et les aires des portions de polygones réguliers inscrits dans le même arc de cercle, augmentent avec le nombre des côtés.

Démonstration.

Fig. 21. Soit OA un rayon et soient BC , DE deux demi-cordes perpendiculaires à OA . Supposons que la première est égale à la moitié d'un côté d'une portion de polygone régulier de m côtés, et la seconde à la moitié d'un côté, portion d'un polygone régulier de $m+n$ côtés, inscrits tous deux dans un même arc.

Menons les rayons OB , OD et prolongeons BD jusqu'à son intersection G avec la direction de OA .

D'après l'énoncé, on doit avoir

$$\begin{aligned} 2(m+n) DE &> 2m \cdot BC, \\ 2(m+n) DE \cdot OE &> 2m \cdot BC \cdot OC. \end{aligned}$$

La seconde inégalité se déduit évidemment de la première

On a $\frac{BC}{DE} = \frac{OBG}{ODG}$; il suffit donc de démontrer l'inégalité

$$\frac{m+n}{m} > \frac{OBG}{ODG}.$$

Le rapport $\frac{OBG}{ODG}$ est plus grand que 1 ; on a donc

$$\frac{OBG}{ODG} < \frac{OBG - ADG}{\text{sect. AOD}} (*).$$

On a aussi $2(m+n) \text{ arc AD} = 2m \text{ arc AB}$; d'où

$$\frac{m+n}{m} = \frac{\text{arc AB}}{\text{arc AD}} = \frac{\text{sect. AOB}}{\text{sect. AOD}}.$$

Mais

$$\frac{OBG}{ODG} < \frac{OBG - ADG}{\text{sect. AOD}} < \frac{OBG - ADG + \text{seg. BDK}}{\text{sect. AOD}} < \frac{\text{sect. AOB}}{\text{sect. AOD}}$$

et la relation $\frac{m+n}{m} = \frac{\text{sect. AOB}}{\text{sect. AOD}}$ donne enfin

$$\frac{OBG}{ODG} < \frac{m+n}{m}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut démontrer, en suivant une marche analogue, le théorème suivant :

Les périmètres et les aires des portions de polygone régulier circonscrites à un même arc de cercle, diminuent quand le nombre des côtés augmente.

Fig. 22. Soit OA un rayon et soit encore MA une tangente au cercle à l'extrémité du rayon.

Prenons AB égale à la $2m^{\text{me}}$ partie du premier contour et AD égale à la $2(m+n)^{\text{me}}$ partie du second. Il suffit évidemment, pour la démonstration complète du théorème, de prouver l'inégalité $\frac{BA}{DA} > \frac{m+n}{m}$. Joignons les points B et D

(*) Un nombre fractionnaire augmente en diminuant les deux termes de la même quantité. Tm.

avec le centre O et par le point G , où DO rencontre l'arc de cercle, menons IGK parallèle à la tangente. On a visiblement m arc $AF = (m+n)$ arc AG , ce qui permet de mettre l'inégalité à démontrer sous la forme

$$\frac{BA}{DA} > \frac{\text{arc } AF}{\text{arc } AG}.$$

On a aussi sect. AOF ; sect. AOG :: arc AF ; arc AG et l'inégalité devient

$$\frac{BA}{DA} > \frac{\text{sect. } AOF}{\text{sect. } AOG}.$$

Mais $\frac{BA}{DA} = \frac{IKO}{GKO}$; et, en partant du rapport $\frac{IKO}{GKO}$, on a la série d'inégalités

$$\frac{IKO}{GKO} > \frac{IKO+GKA}{\text{sect. } OGA} > \frac{IKO+GKA-GIF}{\text{sect. } OGA} > \frac{\text{sect. } AOF}{\text{sect. } OGA}$$

et enfin, par suite de la relation $\frac{BA}{DA} = \frac{IKO}{GKO}$,

$$\frac{BA}{DA} > \frac{\text{sect. } AOF}{\text{sect. } OGA}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$