NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEVRET

Détermination du nombre des combinaisons complètes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 87-90
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__87_1>

DÉTERMINATION

DU

NOMBRE DES COMBINAISONS COMPLÈTES.

PAR M. LEVRET,
Capitaine d'État-major.

1. On entend par combinaisons *complètes* de m lettres prises n à n, les groupes que l'on peut former avec n de ces lettres et différant entre eux au moins par une lettre. Ce qui distingue les combinaisons simples des combinaisons complètes, c'est que dans ces dernières la même lettre peut être répétée plusieurs fois.

Ainsi, toutes les combinaisons complètes des quatre lettres a, b, c, d, prises **3** à **3**, sont :

$$\begin{array}{cccc} abc & abd & acd & bcd, \\ a^2b & b^2a & c^2a & d^2a, \\ a^2c & b^2c & c^2b & d^2b, \\ a^2d & b^2d & c^2d & d^2c, \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3. \end{array}$$

Cherchons l'expression générale du nombre des combinaisons complètes de m lettres prises n à n. Je représenterai ce nombre par $C_{m,n}$. D'après cette notation, $C_{m-m', n-n'}$, sera le nombre de combinaisons complètes de $m-m'$ lettres en prenant dans chacune $n-n'$ de ces lettres.

En formant $C_{m,n}$ groupes de n lettres, on écrit, en tout $nC_{m,n}$ lettres, et chacune d'elles est répétée $\frac{n}{m}$ $C_{m,n}$ fois. Cherchons une autre expression de ce nombre : pour cela réunissons, parmi ces combinaisons, celles qui renferment une même lettre, a par exemple, et retranchons a une fois de chacun de ces groupes, il restera alors les combinaisons complètes des m lettres prises $n-1$ à $n-1$, et d'après ce que l'on vient de dire a s'y trouve déjà répété $\frac{n-1}{m}$ $C_{m,n-1}$ fois ; de plus, comme on a retranché a une fois de $C_{m,n-1}$ groupes, l'expression cherchée est :

$$C_{m,n-1} + \frac{n-1}{m} C_{m,n-1}.$$

On aura donc

$$\frac{n}{m} C_{m,n} = C_{m,n-1} + \frac{n-1}{m} C_{m,n-1} ;$$

faisant disparaître le dénominateur et effectuant les réductions, il vient

$$nC_{m,n} = (m+n-1) C_{m,n-1} ;$$

remplaçant successivement n par $n-1, n-2 \ldots 3, 2$, on obtient

$$(n-1)\,C_{m,n-1} = (m+n-2)\,C_{m,n-2},$$
$$(n-2)\,C_{m,n-2} = (m+n-3)\,C_{m,n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3C_{m,3} = (m+2)\,C_{m,2},$$
$$C_{m,2} = (m+1)\,C_{m,1};$$

mais, d'après la notation, on a évidemment

$$C_{m,1} = m,$$

multipliant toutes ces égalités entre elles et supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'équation résultante, on aura :

$$n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1C_{m,n} = m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1),$$

d'où

$$C_{m,n} = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots..\,n}.$$

Expression entière, on le démontre en algèbre ; de plus, elle est égale au nombre des combinaisons simples de $m+n-1$ lettres prises n à n.

2. On peut, au moyen de cette formule, trouver le nombre des termes du développement d'un polynôme $(a+b+c+\ldots..+l)$ élevé à la puissance n.

En effet, le terme général de ce développement est

$$Ca^m b^{m'} c^{m''}\ldots.\, l^{n-m-m'-m''\ldots.},$$

C étant son coefficient. Il y aura autant de termes que l'on pourra donner de valeurs différentes aux exposants $m, m', m'', \ldots..\,(n-m-m'-m''\ldots..)$, dont la somme est n. Chaque terme peut être considéré comme renfermant le produit de n facteurs pris parmi les lettres du polynôme proposé. Autant on pourra former de produits différents en prenant n de ces lettres, mais en supposant que chacune peut être répétée plusieurs fois, autant le développement aura de termes, c'est-à-dire que l'expression cherchée est égale au nombre des combinaisons complètes de m lettres prises n à n ; ainsi, le nombre des termes du développement est

$$\frac{m(m+1)(m+2)\ldots.(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Pour appliquer cette formule au cas du binôme $(a+b)^m$, il faut faire $m=2$, ce qui donne

$$\frac{2.3\ldots\ldots m(m+1)}{1.2\ldots\ldots m}=m+1.$$