TERQUEM

Considérations sur le triangle rectiligne, d'après Euler

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 79-87

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__79_0>

CONSIDÉRATIONS

SUR

LE TRIANGLE RECTILIGNE,

D'APRÈS EULER.

1. Le triangle rectiligne renferme cinq points remarquables : 1° le centre du cercle circonscrit ; 2° le centre du cercle inscrit ; 3° le centre de gravité de l'aire ; 4° le point de rencontre des trois hauteurs ; 5° le centre de gravité du périmètre.

On sait d'ailleurs : 1° que le point de rencontre des trois hauteurs n'est autre que le centre du cercle circonscrit au triangle que l'on forme en menant par chaque sommet une parallèle au côté opposé ; 2° que le centre de gravité du périmètre est le même que le centre du cercle inscrit au triangle qui a pour sommet les milieux des trois côtés.

2 Il s'ensuit que les 2^e, 3^e et 5^e points sont toujours sur une même droite ; car le centre du cercle inscrit et le centre de gravité du périmètre sont des points homologues, situés dans des triangles semblables et semblablement placés, mais dans une position inverse, le rapport des côtés étant comme 1 : 2 ; il s'ensuit que la droite qui joint ces deux points divise, dans le même rapport, la droite qui va du sommet de l'angle au milieu du côté opposé ; l'intersection des deux droites est donc le centre de gravité de l'aire.

Le même genre de raisonnement fait voir que la droite qui joint le 1er et le 4^e passe aussi par le 3^e point. Cette dernière propriété est due à Euler, qui l'a déduite de considérations analytiques (*). Nous croyons utile de les reproduire avec quelques développements ; ce sont pour les élèves d'excellents exercices de calcul littéral et numérique.

3. Soit ABC, un triangle donné.

a, b, c, les côtés du triangle opposés respectivement aux sommets A, B, C.

E, point d'intersection des trois hauteurs.

F, centre de gravité de l'aire du triangle, ou point de moyenne distance des trois sommets.

G, centre du cercle inscrit.

H, centre du cercle circonscrit.

Posons :

$$EG=e;\ GH=f;\ FH=g;\ FG=h;\ EH=k;\ EF=l,\ a+b+c=p;$$
$$ab+ac+bc=q;\quad abc=r.$$

S= aire du triangle ; R= rayon du cercle circonscrit ; ρ= rayon du cercle inscrit ; A= origine des coordonnées rectangulaires ; AB= direction de l'axe des x positifs.

4. Un théorème connu donne :

$$16\,S^2=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

Or a, b, c, sont les racines de l'équation $z^3-pz^2+qz-r=0$, et S^2 est une fonction symétrique de ces racines ; on peut donc en trouver la valeur en fonction des coefficients de l'équation. Faisant le calcul, on trouve :

$$16\,S^2=p\,(4pq-p^3-8r).$$

5. $$R=\frac{abc}{4S}=\frac{r}{4S}$$ (Legendre, liv. III, prop. 32) ;

$$\rho=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2S}{p};$$

d'où $$R\rho=\frac{r}{2p}.$$

(*) *Mémoires de Pétersb.*, t. XI, 1765.

6. Les coordonnées des points E, F, G, H, sont indiquées dans tous les traités élémentaires; nous les transcrivons ici :

Points.	Abscisses.	Ordonnées.
E ;	$\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}$;	$\frac{(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8cS}$.
F ;	$\frac{3c^2+b^2-a^2}{6c}$;	$\frac{2S}{3c}$.
G ;	$\frac{c+b-a}{2}$;	$\frac{2S}{a+b+c}$.
H ;	$\frac{1}{2}c$;	$\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8S}$.

7. Lorsque $b=a$, les quatre abscisses se réduisent à $\frac{1}{2}c$; donc lorsque le triangle est isocèle, les quatre points sont sur une même droite perpendiculaire à la base; ce qui est d'ailleurs évident par intuition.

8. Les quatre points, considérés deux à deux, fournissent six distances, dont les carrés sont des fonctions symétriques des côtés a, b, c, par conséquent exprimables en fonction des coefficients p, q, r Effectuant les calculs, il vient :

$$e^2=\frac{r^2}{4S^2}-\frac{4r}{p}-p^2+3q=6g^2+3h^2-2f^2.$$

$$f^2=\frac{r^2}{16S^2}-\frac{r}{p}.$$

$$g^2=\frac{r^2}{16S^2}-\frac{1}{9}p^2+\frac{2}{9}q.$$

$$h^2=\frac{-p^3+5pq-18r}{9p}.$$

$$k^2=\frac{9r^2}{16S^2}-p^2+2q.$$

$$l^2=\frac{r^2}{4S^2}-\frac{4}{9}p^2+\frac{8}{9}q.$$

9. De là, on déduit :

$$l=2g,\quad k=3g;\ \text{donc}\ g+l=k.$$

Ainsi les trois points E, F, H, se succèdent dans cet ordre sur une même droite.

10. Au moyen des coordonnées des points E et H, on trouve pour équation de cette droite :

$$4S(a^2-b^2)y=[2c^4-(a^2-b^2)^2-c^2(a^2+b^2)]x+c(b^2-c^2)(c^2+b^2-a^2).$$

11. Lorsqu'on a $b=c$ ou $b^2+c^2=a^2$, la droite passe par l'origine. Dans ces cas, le triangle est isocèle ou rectangle en A. La réciproque est évidente.

Lorsque $a=b$, la droite est perpendiculaire au côté c.

12. Le coefficient de x peut se mettre sous cette forme :

$$(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)-c^2(a^2+b^2-c^2)=4abc^2$$
$$\cos. A\cos. B-2abc^2\cos. C=2abc^2(2\cos. A\cos. B-\cos. C).$$

Pour que la droite devienne parallèle à l'axe des x, il faut que l'on ait :

$$2\cos. A\cos. B=\cos. C=-\cos.(A+B);\ \text{d'où}\ \text{tang}. A\ \text{tang}. B=3.$$

Quand cette relation existe, la droite est parallèle au côté AB. Il y a une exception : si tang. $A=\sqrt{3}$, alors $A=B=60°$, le triangle est équilatéral, et tous les termes de l'équation de la droite s'anéantissent ; alors les quatre points se réduisent à un seul.

13. Cherchons dans quel cas le point G est situé sur la droite (10). A cet effet, substituons dans cette équation, à la place de x et de y, les valeurs des coordonnées du point G ; et, mettant au lieu de $16S^2$, sa valeur développée, et passant tout dans le premier membre, il vient, après avoir exécuté les calculs et fait les réductions,

$$2c^2(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)+2a^2b^2c(a-b)+2c^5(a-b)-2c^3$$
$$(a^3-b^3)+2abc(a-b)(a^2+ab+b^2)=0; \qquad (1)$$

divisant par $2c(a-b)$, on a successivement les équations

$$c(a+b)(c^2-a^2-b^2)+a^2b^2+c^4-c^2(a^2+ab+b^2)+ab$$
$$(a^2+ab+b^2)=0; \qquad (2)$$
$$a^2b^2+ab(a^2+ab+b^2)=ab(a+b)^2;$$
$$c^4-c^2(a^2+ab+b^2)=c^2[c^2-a^2-ab-b^2]=c^2(c^2-a^2$$
$$-b^2)-abc^2;$$
$$c(a+b)(c^2-a^2-b^2)+c^2(c^2-a^2-b^2)=c(c^2-a^2-b^2)(a+b+c)$$
$$ab(a+b)^2-abc^2=ab(a+b+c)(a+b-c);$$

donc le quotient (2) est divisible par $a+b+c$, et on a pour second quotient

$$c(c^2-a^2-b^2)+ab(a+b-c)=c(c^2-b^2)+ab(b-c)+a^2(b-c);$$

divisant par $b-c$, on obtient :

$$ab+a^2-c(c+b)=b(a-c)+(a-c)(a+c)=(a-c)(a+b+c);$$

Ainsi l'équation (1) prend cette forme :

$$2c(a+b+c)^2(a-b)(b-c)(a-c)=0.$$

Elle n'est donc possible que dans trois cas; le point G, ne peut donc se trouver sur la droite, que lorsque le triangle est isocèle.

Ainsi, trois des quatre points, parmi lesquels doit se trouver G, étant donnés de position, le triangle est déterminé; on peut en calculer les côtés, comme on va voir.

14. Exprimons les distances e, f, g, etc., en fonction de R, ρ, p au moyen des formules qu'on trouve dans les paragraphes (4) et (5).

On a

$$q=\frac{16S^2+p^4+8pr}{4p^2}=\frac{r^2+R^2p^4+8prR^2}{4p^2R^2}=\rho^2+\frac{p^2}{4}+\frac{2r}{p}=$$
$$\rho^2+\frac{p^2}{4}+4R\rho$$

$$e^2=4R^2+4R\rho+3\rho^2-\frac{p^2}{4}$$
$$f^2=R^2-2R\rho$$
$$g^2=R^2+\frac{8}{9}R\rho+\frac{2}{9}\rho^2-\frac{1}{18}p^2$$

$$h^2=-\frac{16}{9}\mathrm{R}\rho+\frac{5}{9}\rho^2+\frac{1}{36}p^2$$

$$k^2=9\mathrm{R}^2+8\mathrm{R}\rho+2\rho^2-\frac{p^2}{2}$$

$$l^2=4\mathrm{R}^2+\frac{32}{9}\mathrm{R}\rho+\frac{8}{9}\rho^2-\frac{2}{9}p^2.$$

15. *Question.* Étant donné f, g, h, trouver les côtés a, b, c ?

Solution. Les équations précédentes donnent

$$6h^2+3g^2-2f^2=(\mathrm{R}-2\rho)^2=\frac{f^4}{\mathrm{R}^2}$$

d'où

$$\mathrm{R}^2=\frac{f^4}{6h^2+3g^2-2f^2}$$

$$3(f^2-g^2-2h^2)=\rho(\mathrm{R}-2\rho)=\frac{\rho f^2}{\mathrm{R}}=\frac{\rho\mathrm{R}f^2}{\mathrm{R}^2}$$

d'où

$$2\mathrm{R}\rho=\frac{3\mathrm{R}^2(f^2-g^2-2h^2)}{f^2}=\frac{3f^2(f^2-g^2-2h^2)}{6h^2+3g^2-2f^2}$$

et

$$\rho^2=\frac{9}{4}\cdot\frac{(f^2-g^2-2h^2)^2}{6h^2+3g^2-2f^2}$$

$$p^2=\frac{f^4}{6h^2+3g^2-2f^2}-12f^2-15g^2+6h^2.$$

Or
$$r=2\mathrm{R}\rho p\,;$$

et
$$q=p^2+\frac{p^2}{4}+\frac{2r}{p}.$$

Donc p, q, r, sont connus ; et a, b, c sont les racines de l'équation $x^3-px^2+qx-r=0$.

16. On peut remplacer g et h par leurs valeurs en k et en h; en effet,

$$g^2=\frac{k^2}{9}\,;\quad h^2=\frac{3e^2-2k^2+6f^2}{9}\,;$$

et l'on obtient

$$R^2 = \frac{f^4}{2e^2+2f^2-k^2},$$

$$2R\rho = \frac{f^2(k^2-f^2-2e^2)}{2e^2+2f^2-k^2},$$

$$p^2 = \frac{4e^4+f^4+3k^4-12e^2f^2+2f^2k^2-8e^2k^2}{2e^2+2f^2-k^2}.$$

Or R^2, $R\rho$, sont essentiellement positifs, donc

$$k^2 < 2e^2+2f^2,$$
$$k^2 > 2e^2+f^2.$$

Ainsi, dans le triangle EGH, l'angle en G est essentiellement obtus

17. *Exemple :*

$$e=f=\sqrt{2};\; k=\sqrt{7};$$

d'où $$p=5\sqrt{3};\; \rho=23;\; r=10\sqrt{3};$$

$$x^3-5x^2\sqrt{3}+23x-10\sqrt{3}=0;$$

$$x=\frac{y}{\sqrt{3}};\; y^3-15y^2+69y-90=0.$$

$$y=6;\; y=\frac{9\pm\sqrt{21}}{2}.$$

$$a=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\; b=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\; c=2\sqrt{3}.$$

2e exemple : $e^2=3$; $f^2=2$; $k^2=9$; on parvient à l'équation

$$x^3-x^2\sqrt{71}+22x-2\sqrt{71}=0;$$

faisons

$$\cos.\alpha=\sqrt{\frac{71}{75}}=\cos.\,11^\circ\,32'\,13'',$$

les trois racines sont

$$\frac{1}{3}\sqrt{71}+\frac{2}{3}\sqrt{5}\cos.\left(60^\circ\pm\frac{1}{3}\alpha\right);\; \frac{1}{3}\sqrt{71}-\frac{2}{3}\sqrt{5}\cos.\alpha$$

18. p^2 étant essentiellement positif, on aura

$$3k^2>4e^2+f^2+2\sqrt{e^4+11e^2f^2-8f^4}.$$

Résolvant le radical, on en tire

$$f^2 < e^2\left[\frac{11+\sqrt{153}}{16}\right].$$

On a aussi

$$2f^2 > k^2 - 2e^2, \qquad (16)$$

$$6f^2 > 3k^2 - 6e^2,$$

et à fortiori

$$6f^2 > -2e^2 + f^2 - 2\sqrt{e^4 + 11e^2f^2 - 8f^4},$$

$$(5f^2 + 2e^2)^2 > 4(e^4 + 11e^2f^2 - 8f^4),$$

$$57f^4 > 24e^2f^2,$$

$$f^2 > \frac{8}{19}e^2.$$

19. L'équation $f^2 = R^2 - 2R\rho$, montre qu'on a toujours $R > 2\rho$; et lorsque cette équation est satisfaite, tout triangle circonscrit au cercle de rayon ρ est inscrit dans le cercle de rayon R ; c'est un cas particulier du beau théorème de M. Poncelet : un polygone étant inscrit à une conique et circonscrit à une autre, il existe une infinité de polygones qui satisfont à cette condition relativement à ces deux coniques ; et réciproquement, s'il arrive qu'on ne puisse satisfaire à cette condition pour un seul polygone, on ne pourra y satisfaire pour aucun autre polygone homonyme. Consultez le chapitre III de la section IV des Propriétés projectives des figures, trésor précieux de propriétés de l'espace que l'analyse n'a pas encore explorées.

20. Soit d la longueur de la bissectrice angulaire intérieure, allant de l'angle C au côté c ; on trouve facilement

$$d = \frac{2ab\cos.\frac{1}{2}C}{a+b}$$

$$d^2(a+b)^2 = 4a^2b^2\cos.^2\frac{1}{2}C$$

$$4a^2b^2 - d^2(a+b)^2 = 4a^2b^2\sin.^2\frac{1}{2}C$$

$$4d^2(a+b)^2a^2b^2 - d^4(a+b)^4 = 4a^4b^4\sin.^2C = 16a^2b^2S^2.$$

On obtient deux équations semblables pour les deux autres bissectrices intérieures : ainsi, connaissant les trois bissectrices intérieures, il y a une possibilité analytique de déterminer les trois côtés ; mais l'élimination mène à une équation très-élevée, parce qu'elle renferme probablement aussi les solutions pour les bissectrices extérieures.

Lorsque deux bissectrices sont égales, les équations peuvent être mises sous une forme où l'on voit que deux côtés doivent être égaux, à quoi l'on parvient également par des considérations géométriques.

21. Désignant par δ la bissectrice médiane qui va de C au milieu du côté opposé et par δ' et δ'' les deux autres médianes, il vient

$$9c^2 = 8\delta'^2 + 8\delta''^2 - 4\delta^2 ;$$

d'ou

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(\delta^2 + \delta'^2 + \delta''^2).$$

Tm.